

Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 4

1. Johda monisteessa summa- ja erotusperiaatteen muotoilu

$$|(A_1 \cup \dots \cup A_n)^C| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

ensin esitellystä muodosta

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

2. Laskuharjoituksiin saapuu 24 opiskelijaa. Näistä 9 oli viikonloppuna kuumeessa, 10 uimarannalla koko viikonlopun - kun oli niin kuumaa - ja 5:n tehtävät tuhoutuivat lemmikkieläimen kynsissä. Kuumeisista henkilöistä 3 vietti viikonlopun rannalla ja 3:n tehtävät joutuivat lemmikin uhriksi. Rannalla viikonlopun viettäneistä kahden tehtävät tuhosi lemmikki ja toinen näistä oli lisäksi kuumeessa.

Kuinka moni opiskelija ei ollut rannalla tai kuumeessa ja vältti tehtävien tuhoutumisen lemmikkieläimen kynsissä?

3. Olkoon D_n joukon $[n]$ kiintopisteettömien permutaatioiden, eli epäjärjestelyjen lukumäärä. Osoita kombinatorisella päättelyllä, että

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}),$$

kun $n \geq 2$.

[Ohje: jos $\pi : [n] \rightarrow [n]$ on epäjärjestely, niin on kaksi vaihtoehtoa. Joko $\pi(\pi(n)) = n$ tai $\pi(\pi(n)) \neq n$. Osoita, että ensin mainitun ehdon täyttäviä epäjärjestelyjä on $(n-1)D_{n-2}$ ja jälkimmäisen ehdon täyttäviä $(n-1)D_{n-1}$.]

4. Pyöreän pöydän ympärillä on $n \geq 6$ tuolia. Kuinka monella tavalla näistä voi valita 4 tuolia niin, että mitkään kolme niistä eivät ole peräkkäin?

5. Olkoot A_1, A_2, \dots, A_n äärellisen joukon A osajoukkoja. Olkoon I indeksijoukon $[n]$ epätyhjä osajoukko. Olkoon B niiden pisteiden $a \in A$ joukko, joille $a \in A_i$, kun $i \in I$ ja $a \notin A_i$ kun $i \notin I$. Osoita, että

$$|B| = \sum_{I \subseteq J \subseteq [n]} (-1)^{|J \setminus I|} \left| \bigcap_{i \in J} A_i \right|.$$

[Hyväksi saa käyttää summa- ja erotusperiaatetta]

Laskuharjoituksista annetaan lisäpisteitä loppukokeeseen seuraavasti:

12-14 tehtävää	1 lisäpiste
15-19 tehtävää	2 lisäpistettä
18-20 tehtävää	3 lisäpistettä
21-23 tehtävää	4 lisäpistettä
24-30 tehtävää	5 lisäpistettä