Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 3
Ratkaisuehdotuksia (RT) (7 sivua)

1. Laske kuinka moni hilakulku toteuttaa seuraavat ehdot:

i) Kulku alkaa pisteestä $(0, -4)$ ja loppuu pisteeseen $(0, 4)$

ii) Kulku koostuu 12 askeleesta jotka ovat kaikki joukossa $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$

iii) Kulku ei käy missään pisteistä $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$

[*Vihje: piirrä kuva!*]
Ratkaisu.

Ehdon ii) nojalla käytössä on siis askeleet oikealle, vasemmalle ja ylös. Ehdosta i) taas seuraa, että sivusuuntaisia askeleita, ts. askeleita vasemmalle tai oikealle, täytyy olla keskenään yhtä monta. Toisaalta ylöspäin täytyy edetä 8 askelta. Näin ollen vasemmalle täytyy ottaa yhteensä täsmälleen $\frac{12-8}{2} = 2$ askelta, samoin oikealle. Ehdot ii) ja iii) taas määräävät, että hilakulun täytyy "ylittää" x-akseli origon kautta ja lisäksi askeleet pisteestä $(-1, 0)$ origoon ja origosta pisteeseen $(0, 1)$ ovat "kiinnitettyjä" kaikissa kuluissa.

Tarkastellaan ensin, kuinka monta erilaista kulkua on pisteestä $(0, -4)$ origoon ja sitten origosta pisteeseen $(0, 4)$. Ennen kulkua "portista" $(0, 0)$ voidaan tehdä siis yhteensä $0, 2$ tai 4 sivusuuntaista askelta (vasemmalle ja oikealle yhtä monta).

1) **Jos sivusuuntaisia askelia otetaan** 0 **ennen origoa** eli edetään suoraan ylöspäin, niin portin jälkeen on käytettävissä 4 sivusuuntaista ja 4 ylöspäin suuntautuvaa askelta. Näistä 8:sta askeleesta ensimmäisen on oltava ylöspäin. Käytettävänä on siis 3 askelta ylöspäin, 2 vasemmalle ja 2 oikealle; järjestyksellä ei ole väliä. Näin ollen ensin voidaan valita ylöspäin suuntautuvat askeleet, joita on $\binom{7}{3}$ kpl, jonka jälkeen $\binom{4}{2}$ eri mahdollisuutta valita vasemmalle suuntautuvat askeleet määräävät viimeiset, eli oikealle tulevat askeleet. Yhteensä siis

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2} \text{ kpl.}$$

2) **Jos taas sivuaskelia otetaan ennen porttia yhteensä** 2, niin ennen origoa on otettava yhteensä 6 askelta, joista 4 askelta ylöspäin ja 1 molemmille sivuille. Täytyy vielä huomata, että viimeinen askel ennen porttia täytyy olla ylöspäin (pisteestä $(0,-1)$ origoon). Näin ollen ennen porttia mahdollisia kulkuja on yhteensä $\binom{5}{3}\binom{2}{1}$ erilaista (5:stä "vapaasta" askeleesta 3 ylöspäin suuntautuvaa voidaan vapaasti valita, kuten myös 1 sivuaskel, jotka yhdessä määräävät toisen sivuaskeleen). Portin jälkeen tilanne on sama, kuin ennen porttia, joten origon jälkeen mahdollisia kulkuja on saman verran ja tuloperiaatteen nojalla tässä tapauksessa erilaisia hilakulkuja on

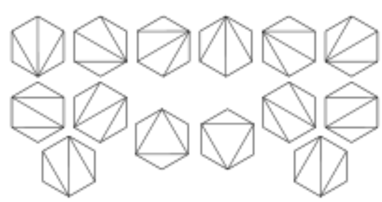
$$\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{5}{3}\binom{2}{1} \text{ kpl.}$$

3) **Jos kaikki** 4 **sivuaskelta (ylöspäin suuntautuvien askeleiden lisäksi) otetaan jo ennen origoa**, niin tilanne on symmetrinen ensimmäisen tapauksen kanssa eli tällaisia kulkuja on yhteensä $\binom{7}{3}\binom{4}{2}$ kpl.

Summaperiaatteen nojalla halutunlaisia hilakulkuja on yhteensä

$$2 \cdot \binom{7}{3}\binom{4}{2} + \left(\binom{5}{2}\binom{2}{1}\right)^2 = 820 \text{ kpl.}$$

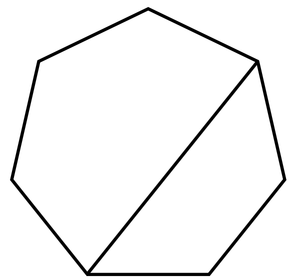
2. Piirrä kaikki tavat jakaa säännällinen 6-kulmio kolmioiksi ja osoita, että kaikki tapaukset on käsitelty.
Ratkaisu.



Esimerkin 2.24. (s. 19) nojalla 6-kulmio voidaan jakaa kolmioiksi $K_6 = C_4$ eri tavalla. Koska $C_4 = \frac{1}{4}\binom{2\cdot 4}{4} = 14$, niin piirretyt kuvat kattavat kaikki mahdollisuudet.

3. Kuinka monta toisiaan leikkaamatonta lävistäjää on piirrettävä kun konveksi n-kulmio jaetaan näiden avulla kolmioihin?

Ratkaisu.



Kuva 1: Lävistäjä jakaa n-kulmion $k+1$-kulmioksi ja $n-k+1$-kulmioksi jollakin $2 \leq k \leq n-2$

Merkitään n-kulmion ($n \geq 3$) kolmioiksi jakavien lävistäjien tarvittavaa määrää $L(n)$:llä. Nyt esimerkiksi $L(3) = 0$, $L(4) = 1$, $L(5) = 2$ jne. Todistetaan induktiolla, että kun n-kulmio jaetaan kolmioiksi, niin tarvittava lävistäjien määrä on $L(n) = n - 3$, kun $n \geq 3$.

Väite pätee alkuarvolla $n = 3$, koska $L(3) = 3 - 3 = 0$ ja kolmion ollessa kyseessä ei lävistäjiä tarvita yhtään.
Oletetaan siis, että $L(n) = n-3$ kaikilla $n \geq 3$ ja todistetaan, että $L(n+1) = (n+1) - 3 = n - 2$.

Piirretään ensin $n+1$-kulmioon yksi lävistäjä. Tämä lävistäjä jakaa $n+1$-kulmion kahteen kulmioon. Näistä kulmioista toisen sivut muodostuvat lävistäjän lisäksi k kappaleesta ”vanhan” kulmion sivuja, joten kyseessä on $k+1$-kulmio. Huomaa, että lävistäjä jakaa $n+1$-kulmion vähintään (kulmien lukumäärän suhteen) kolmioksi ja suurimmillaan n-kulmioksi, joten $2 \leq k \leq n-1$. Jäljelle jäävän monikulmion sivut taas muodostuvat lävistäjän lisäksi $n+1-k$ kappaleesta ”vanhan” kulmion sivuja, joten kyseessä on $n-k+2$-kulmio.

Nyt $n+1$-kulmioon tarvittavien lävistäjien lukumäärä saadaan laskemalla yhteen muodostuneisiin $k+1$- ja $n-k+2$-kulmioihin tarvittavien lävistäjien lukumäärä sekä lisäämällä summaan jo valmiiksi piirretty lävistäjä. Siis

$$L(n+1) = 1 + L(k+1) + L(n-k+2) \stackrel{i.o.}{=} 1 + k + 1 - 3 + n - k + 2 - 3 = n - 2.$$

Siis induktioväitteemme pätee ja on todistettu, että $L(n) = n - 3$ kaikilla $n \geq 3$.

4. Vankilaan saapuu n vankia. Vanginvartijat arvioivat kuinka vaarallisia vangit ovat ja vangeille annetaan numerot 1-n niin, että vanki i on aina vaarallisempi kuin vanki j, kun i < j. Ensimmäisenä aamuna vangit pidetään samassa ryhmässä. Toisena aamuna vangit jaetaan kahteen epätyhjään ryhmään niin, että toiseen tulee vaarallisimmat (pienimmät numerot) vangit ja toiseen vaarattomimmat (isoimmat numerot). Tästedes joka aamu valitaan yksi ryhmistä, joissa on vähintään kaksi vankia ja jaetaan se kahtia niin, että yhteen ryhmään tulee vanhan ryhmän vaarallisimmat ja toiseen vaarattomimmat vangit. Sääntönä on, että jaetaan aina kahteen ryhmään se ryhmä, jossa on vaarallisin mahdollinen vanki. Tätä prosessia jatketaan, kunnes n aamun jälkeen jokainen ryhmä koostuu yksittäisestä vangista. Kuinka monella tavalla ryhmien hajottaminen voidaan tehdä?

Ratkaisu.
Merkitään jakomahdollisuuksien lukumäärää h_n:llä, jossa alaindeksi n viittaa vankien lukumäärään. Vangit voitaisiin esimerkiksi jakaa niin, että erotettaisiin aina pelkästään vaarallisin vanki joukosta tai niin, että ensin jaetaan vangit kahteen ryhmään ja tehdään sama erottelu ryhmä kerrallaan aloittaen vangin numero 1 sisältävästä ryhmästä. Katsotaan nyt mitä seuraa, kun ensimmäinen ryhmän kahtiajako on mielivaltainen.

1. aamu: Kaikki vangit samassa joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$.
2. aamu: Vangit jaetaan kahteen joukkoon; nyt vangit muodostavat kahden joukon yhdisteen

$$\{1, 2, \ldots, k\} \cup \{k+1, k+2, \ldots, n\}, \text{ missä } k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Tämän jaon jälkeen loput jaot voidaan suorittaa yhtä monella tavalla kuin on tapoja jakaa ensin ensimmäinen ryhmä (tässä joukossa aina vaarallisimman vangin sisältämä joukko, kunnes kaikki ovat erillään) ja sitten toinen ryhmä halutulla tavalla. Siis tapoja on yhteensä $h_k h_{n-k}$. Koska k voi olla mikä tahansa luvuista (eli vangeista) $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ja jokainen eri tapaus johtaa erilaiseen jatkoon, niin summa

$$h_n = h_1 h_{n-1} + \cdots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}.$$

kertoo kaikkien mahdollisten jakojen lukumäärän, kun vankeja on n kpl. Huomataan, että asettamalla $h_k = g_{k-1}$, kaikilla $0 \leq k \leq n$ ja $g_0 = 1$, voidaan kirjoittaa

$$h_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} h_k h_{(n+1)-k} = \sum_{k=1}^{n} g_{k-1} g_{(n+1)-k-1} = \sum_{k=1}^{n} g_{k-1} g_{n-k} \equiv g_n.$$

Huomataan, että jono (g_n) toteuttaa Lemman 2.24. rekursiokaavan Catalanin luvuille $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$. Siten

$$h_n = C_{n-1} = \frac{1}{(n-1)+1} \binom{2(n-1)}{(n-1)} = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{(n-1)}.$$

5. Olkoot $A_1, \ldots, A_n$ joukon X osajoukkoja. Määritellään kullekin $S \subseteq [n]$ joukko

$$X_S = \bigcap_{k \in S} A_k \setminus \bigcup_{k \in S^C} A_k \subseteq X.$$

Määritellään funktiot $f : \mathcal{P}([n]) \to \mathbf{N}$ ja $g : \mathcal{P}([n]) \to \mathbf{N}$ seuraavasti:

$$f(S) = |\bigcap_{k \in S} A_k|$$

$$g(S) = |X_S|.$$

Osoita, että kaikille $S \subseteq [n]$ pätee

$$g(S) = f(S) - \sum_{S \subsetneq I \subset [n]} g(I).$$

Ratkaisu.

I tapa:
Osoitetaan ensin, että joukot X_I, jossa $I \subseteq [n]$, ovat erillisiä. Toisin sanoen

kaikille $x \in X$ on olemassa täsmälleen yksi indeksijoukko $I \subseteq [n]$ siten, että $x \in X_I$. Tehdään tämä kahdessa osassa:

(i) Osoitetaan, että on olemassa *jokin* indeksijoukko $I \subseteq [n]$ siten, että $x \in X_I$. Olkoon $I = \{i \in [n] : x \in A_i\}$. Määritelmän mukaan $X_I = \bigcap_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{i \notin I} A_i$. Indeksijoukko I valittiin siten, että x kuuluu kaikkiin joukkoihin A_i ja toisaalta $x \notin A_i$, jos $i \notin I$. Siis on olemassa $I \subseteq [n]$ siten, että $x \in X_I$.

(ii) Osoitetaan vastaoletuksen kautta indeksijoukon I olevan ainoa, jolle $x \in X_I$. Oletetaan siis, että on olemassa indeksijoukot $I \neq J$ siten, että $x \in X_I$ ja $x \in X_J$. Nyt löytyy indeksi i siten, että $i \in I \setminus J$ tai $i \in J \setminus I$. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $I \setminus J$ on epätyhjä eli löytyy indeksi $i \in I \setminus J$. Koska $i \in I$, niin $x \in A_i$, sillä oletettiin, että $x \in X_I$. Koska toisaalta $x \in X_J$ ja $i \notin J$, niin $x \notin A_i$. RR.

Siis joukot X_I ovat erillisiä kaikilla $I \subseteq [n]$ ja siten $\sum_{I \subseteq [n]} g(I) = \left| \bigcup_{I \subseteq [n]} X_I \right|$. Erityisesti pätee $\sum_{S \subsetneq I \subseteq [n]} g(I) = \left| \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I \right|$

Olkoon (indeksi)joukko S sellainen, että $S \subsetneq I \subseteq [n]$. Jos $x \in X_I = \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{i \notin S} A_i$, niin $x \in A_i$ kaikilla $i \in I$, erityisesti $x \in A_i$ kaikilla $i \in S \subsetneq I$. Siis $X_I \subset \bigcap_{i \in S} A_i$. Siten (muista joukkojen X_I erillisyys!)

$$|\bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I| = |\bigcap_{i \in S} A_i| - |\bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I| = g(S) - \sum_{S \subsetneq I \subseteq [n]} g(I).$$

Väite seuraa, jos voimme vielä osoittaa, että $X_S = \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{i \notin S} A_i = \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I$.

Jos $x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{i \notin S} A_i$, niin $x \in A_i$ kaikilla $i \in S$ ja $x \notin A_i$ kaikilla $i \notin S$. Tästä taas seuraa, että $x \notin X_I$ kaikilla I, joille pätee $S \subsetneq I \subseteq [n]$, sillä nyt löytyy indeksi k siten, että $k \in I \setminus S \subset I$, jolle $x \not{} in A_k$. Koska tämä pätee kaikilla I, joille $S \subsetneq I \subseteq [n]$, niin $x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I$. Siis $x \in A_i$ kaikilla $i \in S$ ja $x \notin X_I$, kun $S \subsetneq I \subseteq [n]$ ja siten

$$x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{i \notin S} A_i \Longrightarrow x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I.$$

Oletetaan sitten, että $x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I$. Jos lisäksi on olemassa indeksi $k \notin S$ siten, että $x \in A_k$, niin $x \in X_S \cup A_k$.

Koska $x \notin \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_S$, niin $x \notin A_k$ millään $k \notin S$. Siispä $x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{i \notin S} A_i$ ja väitteen toinen suunta eli

$$x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} X_I \Longrightarrow x \in \bigcap_{i \in S} A_i \setminus \bigcup_{i \notin S} A_i$$

on myös todistettu.

II tapa:

Joukkojen X_I kaikilla $I \subseteq [n]$ erillisyys todistettiin jo edellä. Määritellään seuraavaksi kuvaus, joka vie X:n osajoukot X_S vastaavalle indeksijoukolle S:

Olkoon $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}([n])$ kuvaus siten, että kaikilla $x \in X$ pätee $k \in \varphi(x)$, jos ja vain jos $x \in A_k$, kun $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$.

(Voit ajatella, että φ kuvaa alkion x vektoriksi: Kun $x \in X$, niin $\varphi(x) \sim (a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, jossa $a_i = 1 \Leftrightarrow x \in A_i$ ja $a_i = 0 \Leftrightarrow x \notin A_i$.)

Määritelmän mukaan $X_S = \bigcap_{k \in S} A_k \setminus \bigcup_{k \in S^C} A_k = \bigcap_{k \in S} A_k \cap \bigcap_{k \in S^C} A_k^C$.

Olkoon $S \subseteq [n]$ (siis $S \in \varphi(X)$). Nyt $x \in \varphi^{-1}\{S\}$, jos ja vain jos $x \in X_S$.

Osoitetaan sitten, että $\bigcup_{S \subseteq I \subseteq [n]} X_I = \bigcap_{k \in S} A_k$. Jos $x \in \bigcup_{S \subseteq I \subseteq [n]} X_I$, niin on olemassa I siten, että $x \in X_I$, kun $S \subseteq I \subseteq [n]$. Tällöin erityisesti kaikilla $k \in I \supseteq S$ pätee $x \in A_k$, joten $x \in \bigcap_{k \in S} A_k$. Jos taas $x \in A_k$ kaikilla $k \in S$, niin $S \subseteq \varphi(x) \subseteq [n]$ ja $x \in X_{\varphi(x)}$. Siis $x \in \bigcup_{S \subseteq I \subseteq [n]} X_I$.

Nyt $\bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} \{I\} \subseteq \bigcup_{S \subseteq I \subseteq [n]} \{I\}$, josta seuraa $\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{S \subsetneq I \subseteq [n]} I\Big) \subset \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{S \subseteq I \subseteq [n]} I\Big)$.

Kuvauksen ominaisuuksien ja edellä todistettujen nojalla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
g(S) &= |\varphi^{-1}(S)| = |\varphi^{-1}\big(\{I : S \subseteq I \subseteq [n]\} \setminus \{I : S \subsetneq I \subseteq [n]\}\big)| \\
&= |\varphi^{-1}\big(\{I : S \subseteq I \subseteq [n]\}\big) \setminus \varphi^{-1}\big(\{I : S \subsetneq I \subseteq [n]\}\big)| \\
&= \Big|\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{S\subseteq I\subseteq[n]} \{I\}\Big)\Big| - \Big|\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{S\subsetneq I\subseteq[n]} \{I\}\Big)\Big| \\
&= \Big|\bigcup_{S\subseteq I\subseteq[n]} \varphi^{-1}\{I\}\Big| - \Big|\bigcup_{S\subsetneq I\subseteq[n]} \varphi^{-1}\{I\}\Big| \\
&= \Big|\bigcap_{k\in S} A_k\Big| - \sum_{S\subsetneq I\subseteq[n]} \Big|\varphi^{-1}\{I\}\Big| = f(S) - \sum_{S\subsetneq I\subseteq[n]} g(I).
\end{aligned}$$