

Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 3

1. Laske kuinka moni hilakulku toteuttaa seuraavat ehdot:

- i) Kulku alkaa pisteestä $(0, -4)$ ja loppuu pisteeseen $(0, 4)$
- ii) Kulku koostuu 12 askeleesta jotka ovat kaikki joukossa $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$
- iii) Kulku ei käy missään pisteistä $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$

[*Vihje: piirrä kuva!*]

2. Piirrä kaikki tavat jakaa säännöllinen 6-kulmio kolmioiksi ja osoita, että kaikki tapaukset on käsitelty.

3. Kuinka monta toisiaan leikkaamatonta lävistäjää on piirrettävä kun konveksi n -kulmio jaetaan näiden avulla kolmioihin?

4. Vankilaan saapuu n vankia. Vanginvartijat arvioivat kuinka vaarallisia vangit ovat ja vangeille annetaan numerot $1-n$ niin, että vanki i on aina vaarallisempi kuin vanki j , kun $i < j$. Ensimmäisenä aamuna vangit pidetään samassa ryhmässä. Toisena aamuna vangit jaetaan kahteen epätyhjään ryhmään niin, että toiseen tulee vaarallisimmat (pienimmät numerot) vangit ja toiseen vaarattomimmat (isoimmat numerot).

Tästedes joka aamu valitaan yksi ryhmistä, joissa on väintään kaksi vankia ja jaetaan se kahtia niin, että yhteen ryhmään tulee vanhan ryhmän vaarallisimmat ja toiseen vaarattomimmat vangit. Sääntönä on, että jaetaan aina kahteen ryhmään se ryhmä, jossa on vaarallisin mahdollinen vanki. Tätä prosessia jatketaan, kunnes n aamun jälkeen jokainen ryhmä koostuu yksittäisestä vangista. Kuinka monella tavalla ryhmien hajottaminen voidaan tehdä?

5. Tehtävä seuraavalla sivulla.

5. Olkoot A_1, \dots, A_n joukon X osajoukkoja. Määritellään kullekin $S \subseteq [n]$ joukko

$$X_S = \bigcap_{k \in S} A_k \setminus \bigcup_{k \in S^c} A_k \subseteq X.$$

Määritellään funktiot $f : \mathcal{P}([n]) \rightarrow \mathbf{N}$ ja $g : \mathcal{P}([n]) \rightarrow \mathbf{N}$ seuraavasti:

$$f(S) = \left| \bigcap_{k \in S} A_k \right|$$

$$g(S) = |X_S|.$$

Osoita, että kaikille $S \subseteq [n]$ pätee

$$g(S) = f(S) - \sum_{S \subsetneq I \subseteq [n]} g(I).$$