Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 2
Ratkaisuehdotuksia (RT) (5 sivua)

Käytä tehtävissä 1-3 kombinatorista päättelyä.

1. Osoita, että kaikilla $0 \leq b \leq a$ pätee

$$\binom{a}{b} = \sum_{k=b}^{a} \binom{k-1}{b-1}$$

Ratkaisu.

Binomikertoimen määritelmän mukaan yhtälön vasen puoli kertoo kuinka monta erilaista b-osajoukkoa on a-joukolla.

Yhtälön oikea puoli taas vastaa seuraavan kombinatorisen tehtävän ratkaisua: Jaetaan ensin joukon $[a]$ b-osajoukot luokkiin sen perusteella, mikä on b-osajoukon suurin alkio. Esimerkiksi kaikki ne b-osajoukot, jotka sisältävät alkion a kuuluvat samaan luokkaan (mikään b-osajoukko ei voi sisältää suurempaa alkiota, kuin a). Myös kaikki ne b-osajoukot, jotka sisältävät alkion $a-1$, mutta eivät alkiota a muodostavat keskenään yhden luokan, sillä näiden kaikkien suurin alkio on $a-1$. Joukon $[a]$ b-osajoukko, jossa on mahdollisimman pieni suurin alkio, on tietysti $\{1, 2, \ldots, b\}$ ja se muodostaa yksin oman luokkansa.

Olkoon K jokin tällainen luokka ja merkitään tähän kuuluvien b-osajoukkojen suurinta alkiota, joka on siis kaikilla sama, k:lla. Nyt siis $b \leq k \leq a$. Lasketaan, kuinka monta erilaista b-joukkoa on tällaisessa luokassa. Alkion k lisäksi b-joukko sisältää siis $b-1$ kpl alkioita, jotka ovat kaikki pienempiä, kuin alkio k, eli ne voidaan valita mielivaltaisesti alkioiden $1, 2, \ldots, k-1$ joukosta. Näin ollen haluttuja b-joukkoja on kyseisessä luokassa $\binom{k-1}{b-1}$ kpl.

Summaamalla kaikkien luokkien (eli kun k käy a:sta b:hen) b-joukkojen lukumäärät saadaan kaikkien joukon $[a]$ b-osajoukkojen lukumäärä.
Siis $\sum_{k=b}^{a} \binom{k-1}{b-1} = \binom{a}{b}$.

2. Osoita, että kaikilla $a, b \geq 0$, $n \leq a+b$ pätee

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

Ratkaisu.

Yhtälön vasen puoli kertoo kuinka monta erilaista n-osajoukkoa on $a+b$ -joukolla.

Yhtälön oikea puoli taas voidaan ajatella kombinatorisen tehtävän ratkaisuksi, missä joukon $[a+b]$ kaikki n -osajoukot A jaetaan luokkiin sen perusteella, kuinka suuri $[a] \cap A$ on. Toisin sanoen, kuinka monta alkiota n-osajoukosta on joukossa $[a]$. Jos $|[a] \cap A| = k$, niin valitaan a-joukosta k-joukko, joka voidaan tehdä $\binom{a}{k}$ tavalla, joista jokaista kohti voidaan b-joukosta valita $n-k$ -osajoukko $\binom{b}{n-k}$ tavalla. Tuloperiaatteesta seuraa, että n-joukko voidaan valita $a+b$-joukosta näin $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ tavalla. Kun summataan yli kaikkien indeksien k, $0 \leq k \leq n$, niin summaperiaatteen nojalla saadaan tulokseksi joukon $[a+b]$ kaikkien erilaisten n-osajoukkojen lukumäärä.

(Huomaa, että binomikerrointa $\binom{a}{k}$ ei ole määritelty, kun $k > a$. Näin ollen tehtävässä voidaan/täytyy tehdä alkuperäistä oletusta $n \leq a+b$ vahvempi oletus eli $n \leq a$ ja $n \leq b$.)

"Arkipäivän lähestymistapa tehtävään"

Valitaan n-pelaajan joukkue. Tämä voidaan tehdä $\binom{a+b}{n}$ tavalla, kun käytössä on $a+b$ pelaajaa. Toisaalta valinta voidaan suorittaa kahdessa osassa; oletetaan, että käytössä on a pelaajaa joukkueesta A ja b pelaajaa joukkueesta B ($A \cap B = \emptyset$). Valitaan ensin joukkueesta A k pelaajaa ($k = 0, 1, \ldots, n$), jolloin joukkueesta B voidaan valia $n-k$ pelaajaa saadaksemme n-pelaajan joukkueen. Näitä erilaisia tapoja on siis tuloperiaatteen nojalla $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. Summaamalla yli kaikkien indeksin k mahdollisten arvojen ($k = 0, 1, \ldots, n$) saadaan kaikkien mahdollisuuksien lukumäärä muodostaa n-joukkue $a+b$ pelaajasta.

3. Osoita, että kaikilla $n \geq 1$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Ratkaisu.

Olkoon A jokin n-joukon osajoukko, jolle pätee $|A| = k$. Nyt tuloperiaatteen nojalla $\binom{n}{k} \cdot k$ kertoo mahdollisuuksien lukumäärän, kun ensin valitaan jokin n-joukon (epätyhjä) osajoukko, jossa on k alkiota ($\binom{n}{k}$ tapaa), ja sitten jokin ko. osajoukon alkio (k tapaa). Summa tästä lukumäärästä yli indeksien k, $1 \leq k \leq n$, käy läpi kaikki mahdolliset joukon $[n]$ k-osajoukot, joista valitaan yksi alkio.

Toisaalta n-joukosta voidaan ensin valita yksi alkio n tavalla, jonka jälkeen erilaisia (epätyhjiä) osajoukkoja, joissa ko. alkio on mukana on yhteensä 2^{n-1} kpl. (Tässä siis valitaan jokaisen jäljelle jääneen alkion, joita on $n-1$ kpl, kohdalla kuuluuko se valitun kanssa samaan osajoukkoon vai ei.)

"Arkipäivän lähestymistapa tehtävään"

Valitaan n ehdokkaan joukosta k pelaajaa joukkueeseen ja näistä k pelaajasta yksi kapteeniksi. Erilaisia tapoja tehdä tämä on siis $\binom{n}{k}k$ ja summaamalla yli kaikkien indeksin k mahdollisten arvojen ($1 \leq k \leq n$) saadaan yhtälön vasen puoli. Toisaalta sama valinta voidaan suorittaa niin, että ensin n ehdokkaan joukosta valitaan yksi kapteeniksi (n mahdollisuutta) ja sen jälkeen valitaan $n-1$ jäljellä olevasta pelaajasta loput pelaajaat joukkueeseen. Tulo $n2^{n-1}$ ilmaisee kuinka monella eri tavalla joukkue, jossa on (ainakin!) kapteeni, voidaan muodostaa.

4. Kokouksessa on n äänioikeutettua henkilöä. Kuinka monella tavalla näistä voidaan muodostaa yksinkertainen enemmistö (ts. joukko, joka on komplementtiaan aidosti suurempi)?
Ratkaisu.

I tapa:
Tarkastellaan ensin tilannetta, kun n on pariton. Joukolla, jossa on n alkiota on yhteensä 2^n osajoukkoa. Osajoukoista tasan puolet on komplementtiaan aidosti suurempia, sillä "valitut" ja "jäljelle jääneet" muodostavat aina erikokoisten joukkojen parin ja tilanne joukkojen kokojen suhteen on symmetrinen. Tämän matemaattinen perustelu palautuu binomikertoimeen: $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ kaikilla $0 \leq b \leq a$.

Tässä tapauksessa yksinkertainen enemmistö voidaan muodostaa siis 2^{n-1} tavalla.

Olkoon sitten n parillinen luku. Vähennetään ensin kaikkien osajoukkojen lukumäärästä 2^n niiden osajoukkojen lukumäärä, jotka ovat samankokoisia; näitä on $\binom{n}{n/2}$ kpl. Jäljelle jääneistä (erikokoisista) $2^n - \binom{n}{n/2}$ osajoukosta puolet on komplementtiaan suurempia, joten vastaus on

$$\left(2^n - \binom{n}{n/2}\right) : 2.$$

II tapa:

Aidosti komplementtiaan suurempi joukko voidaan muodostaa joukosta $[n]$ yhtä monella tavalla, kuin on summa *kaikista* niistä binomikertoimista $\binom{n}{a}$, missä $a > n/2$ ja $a \in N$. Käytetään merkintää $\lfloor b \rfloor$ tarkoittamaan lukua $b \in \mathbf{R}$ pyöristettynä alaspäin ensimmäiseen kokonaislukuun. Siis $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ on ensimmäinen kokonaisluku, joka on *aidosti* suurempi kuin $n/2$. Nyt

$$\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{k}$$

kertoo kaikkien mahdollisuuksien lukumäärän valita enemmistö joukosta $[n]$ riippumatta siitä, onko n pariton vai parillinen.

5. Joukon S (järjestämätön) ositus on joukko $\mathcal{A}$, S:n epätyhjiä osajoukkoja jotka peittävät S ts. jokainen $s \in S$ kuuluu johonkin $A \in \mathcal{A}$. Esimerkiksi $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3, 5, 6\}\}$ on joukon $[6]$ ositus. Joukon $[n]$ ositusten lukumäärää B_n kutsutaan Bellin luvuksi. Osoita kombinatorisella päättelyllä, että Bellin luvut toteuttavat seuraavan rekursiivisen kaavan:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

Ratkaisu.

Tarkastellaan joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ mielivaltaista ositusta P. Siinä on osa, joka sisältää luvun n, sanokaamme $A \cup \{n\}$. Joukko A on joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ osajoukko. Osituksen P muut osat muodostavat joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus A$

osituksen P'. Ositus P' ja joukko A määräävät osituksen P yksikäsitteisesti: $P = P' \cup (\{A \cup \{n\}\})$.

Kun jokaista lukua k kohti A käy läpi joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ $k-1$-alkioiset osajoukot ja P' käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus A$ ositukset, niin P käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ ositukset täsmälleen kerran. Joukossa A on siis $k-1$ alkiota ja siten joukossa $A \cup \{n\}$ on k alkiota. Tällöin P' on $n-k$ -alkioisen joukon ositus.

Joukko A voidaan valita $\binom{n-1}{k-1}$ tavalla ja ositus P' voidaan valita B_{n-k} tavalla. Kaava seuraa nyt tulo- ja summaperiaatteista.