Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 2

Käytä tehtävissä 1-3 kombinatorista päättelyä.

1. Osoita, että kaikilla $0 \leq b \leq a$ pätee

$$\binom{a}{b} = \sum_{k=b}^{a} \binom{k-1}{b-1}$$

[Vihje: jokaisella joukon $[a]$ osajoukolla on suurin alkio.]

2. Osoita, että kaikilla $a, b \geq 0$, $n \leq a + b$ pätee

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

3. Osoita, että kaikilla $n \geq 1$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

4. Kokouksessa on n äänioikeutettua henkilöä. Kuinka monella tavalla näistä voidaan muodostaa yksinkertainen enemmistö (ts. joukko, joka on komplementtiaan aidosti suurempi)?

5. Joukon S (järjestämätön) ositus on joukko $\mathcal{A}$, S:n epätyhjiä osajoukkoja jotka peittävät S ts. jokainen $s \in S$ kuuluu johonkin $A \in \mathcal{A}$. Esimerkiksi $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3, 5, 6\}\}$ on joukon $[6]$ ositus. Joukon $[n]$ ositusten lukumäärää B_n kutsutaan Bellin luvuksi. Osoita kombinatorisella päättelyllä, että Bellin luvut toteuttavat seuraavan rekursiivisen kaavan:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$