Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 1
Ratkaisuehdotuksia (RT) (5 sivua)

Kaikki kurssin laskuharjoitukset pidetään Exactumin salissa C123. Malliratkaisut tulevat nettiin kurssisivulle.

1. Osoita, että vuoden 2010 jalkapallon MM-turnauksessa niiden joukkueiden lukumäärä, jotka keskenään pelasivat parittoman määrän otteluita oli parillinen.
[Vihje: kuhunkin pelattuun otteluun osallistui tasan kaksi joukkuetta. Jos $|S|$ *on pariton luku ja kullekin* $s \in S$ *on annettu pariton luku* $f(s)$*, niin summa* $\sum_{s \in S} f(s)$ *on pariton.]*

Ratkaisu.
Olkoo X kaikkien joukkueiden joukko ja $S \subset X$ niiden jalkapallojoukkueiden joukko, jotka pelasivat parittoman määrän pelejä. Nyt $X \setminus S$ on parillisen määrän pelejä pelanneiden joukko.

Merkitään $f(s)$:llä joukkueen $s \in X$ pelaamien pelien määrää (eli kuvaus $f : X \longrightarrow \mathbf{N}$ kertoo joukkueen pelaaman pelimäärän). Lisäksi tiedetään, että $f(s)$ on pariton, kun $s \in S$ ja parillinen, kun $s \in X \setminus S$. Nyt kaiken kaikkiaan pelattujen pelimäärien summa on kaksinkertainen *otteluiden* kokonaislukumäärään nähden (jokaisessa ottelussa 2 joukkuetta). Siis

$$\sum_{s \in X} f(s) \overset{(*)}{=} \sum_{s \in S} f(s) + \sum_{s \in X \setminus S} f(s) = 2 \cdot (\text{pelatut ottelut}).$$

$(*)$ Koska $X = S \cup (X \setminus S)$ ja $S \cap (X \setminus S) = \emptyset$.

Yo. yhtälön oikealla puolella on selvästi parillinen luku. Toisaalta $\sum_{s \in X \setminus S} f(s)$ on parillisten lukujen summa, joten se on parillinen luku. Näin ollen myös summan $\sum_{s \in S} f(s)$ täytyy olla parillinen luku ja siten parittomien lukujen summana siinä täytyy olla parillinen määrä termejä. Toisin sanoen parittoman määrän pelanneiden joukkueiden lukumäärän täytyy olla parillinen.

2. Kuinka monella tavalla

a) 10 henkilöä voidaan jakaa 4:n ja 6:n hengen ryhmiin?

b) 10 henkilöä voidaan jakaa kahteen 5:n hengen joukkueeseen?

Ratkaisu.
a) Kun 10:stä henkilöstä valitaan 4 henkeä, niin automaattisesti toinen ryhmä muodostuu jäljelle jääneistä, joita on 6 henkeä. Lisäksi ”valittujen” ja ”jäljelle jääneiden” ryhmät ovat keskenään erilaiset jo kokonsa puolesta! Siten 10 henkilöä voidaan jakaa 4:n ja 6:n hengen ryhmiin täsmälleen niin monella tavalla, kuin on 10-joukolla 4-osajoukkoja tai yhtä hyvin 6-osajoukkoja!

Siis on olemassa yhteensä $\binom{10}{4} = \binom{10}{6} = 210$ erilaista jakoa.

b) Tilanne on muutoin sama, kuin a)-kohdassa, mutta tässä täytyy ottaa huomioon, että jokainen pari ”valittuja” ja ”jäljelle jääneitä” on jossain jaossa toisinpäin.

Näin ollen binomikerroin $\binom{10}{5}$ antaa kaksinkertaisen lukumäärän jakoja, kuin mitä on tapoja valita kaksi (keskenään samanarvoista) 5 hengen ryhmää.

Tehtävän tapauksessa on olemassa yhteensä $\binom{10}{5} : 2 = 252 : 2 = 126$ erilaista jakoa.

3. Kuinka moni joukon $[8] = \{1, 2, \ldots, 8\}$ permutaatio kuvaa kaikki parilliset luvut parittomille luvuille?

Ratkaisu.
Jos joukon [8] permutaatio kuvaa kaikki parilliset parittomille, niin selvästi sama permutaatio kuvaa kaikki parittomat luvut parillisille.

Ratkaisua voi lähestyä myös tarkastelemalla, kuinka monella eri tavalla parittomat (ja sitten parilliset) voivat ”järjestäytyä” keskenään (erillisinä joukkoina). Paikat merkkijonossahan oli jo määrätty ko. joukoille etukäteen.

Parittomat luvut voivat kuvautua parillisille luvuille niin monella tavalla, kuin on 4-joukon permutaatioita (bijektioita), siis 4! kpl. Samoin jäljellä olevat parilliset luvut voivat kuvautua 4! tavalla parittomille. Tuloperiaatteen nojalla haluttuja permutaatioita on yhteensä $4! \cdot 4! = 576$ kpl.

Ratkaisua voi myös ajatella esimerkiksi valitsemalla kullekin joukon [8] ”paikalle”, yksitellen luvun joukosta [8]. Permutaatioiden lukumäärä seuraa tuloperiaatteesta sillä kyseessä on ”sarja toimintoja” (lukujen kuvautuminen), jotka voidaan tehdä yhtäaikaa. Tällä tavalla ajateltuna luvulle 1 voi kuvautua mikä tahansa luvuista $2, 4, 6$ tai 8; siis 4 eri mahdollisuutta. Luvulle 2 taas voi kuvautua taas mikä tahansa luvuista $1, 3, 5$ tai 7; siis 4 eri mahdollisuutta tässäkin. Luvuille 3 ja 4 taas voi kuvautua enää jokin 3:sta luvusta (yksi luku sekä parillisista, että parittomista on jo kuvautunut luvuille). Samalla päättelyllä luvuille 5 ja 6 voi kuvautua yksi kummallekin tietystä 2-joukosta ja luvuille 7 ja 8 on molemmille jäljellä enää 1 tietty luku. Tuloperiaatteen nojalla permutaatioiden lukumäärä on

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 576.$$

4. Kuinka monta 7:n merkin pituista merkkijonoa voidaan muodostaa numeroista $1 - 7$, kun suurempi pariton numero ei saa koskaan esiintyä ennen pienempää paritonta numeroa?

Ratkaisu.

Tehtävän ratkaisun hahmottamiseksi tarkastellaan ensin muutamaa tehtävän ehdot toteuttavaa merkkijonoa. Esimerkiksi merkkijonot 2143567 ja 1264357 toteuttavat tehtävän ehdot. Kuinka tällaiset jonot saadaan sitten rakennettua? Tärkeää on huomata, että parittomat luvut ovat aina keskenään suuruusjärjestyksessä muutoin millä "paikoilla" vain jonossa: esimerkiksi ?1?35?7. Merkkijonoon parittomien lukujen jälkeen jääneille tyhjille paikoille, siis edellisessä jonossa kysymysmerkkien tilalle voidaan parittomat luvut $2, 4, 6$ laittaa kuinka vain halutaan. Esimerkiksi 2163547 tai 4163527 kelpaavat.

Parittomien lukujen $1, 3, 5, 7$ järjestys on siis sidottu ja siten ne voivat olla halutussa merkkijonossa täsmälleen yhtä monella tavalla, kuin on 4:n alkion osajoukkoja 7-joukossa. Tätä voidaan ajatella myös niin, että valitaan ensin parittomien lukujen "paikat" merkkijonossa. Näitä mahdollisuuksia on siis $\binom{7}{4}$ kpl.

Toisaalta, parilliset luvut voivat keskenään olla missä tahansa järjestyksessä, joten jokaista em. merkkijonoa kohti parilliset luvut voivat olla 3! eri järjestyksessä. Näin ollen haluttuja merkkijonoja on yhteensä

$$\binom{7}{4} \cdot 3! = 210 \text{ keskenään erilaista.}$$

Tehtävän ratkaisuun päätyy myös, jos ajattelee ensin sijoittavansa parilliset luvut $2, 4, 6$ jonon seitsemälle vapaalle paikalle mielivaltaisesti. Näitä tapoja on yhteensä $7 \cdot 6 \cdot \cdot 5 = 210$ kappaletta. Tämän jälkeen parittomilla luvuilla on tasan yksi mahdollisuus asettautua vapaille paikoille, sillä niiden järjestys oli määrätty. Siis kaiken kaikkiaankin $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 210$ eri tapaa muodostaa haluttu merkkijono.

5. Olkoon X äärellinen joukko ja $f : X \to X$ kuvaus. Määritellään lukujono $(a_0, a_1, \dots)$ seuraavasti:

$$a_k = \begin{cases} |X|, & \text{kun } k = 0 \\ |f^k X|, & \text{kun } k \geq 1. \end{cases}$$

Osoita että kaikilla $k \geq 0$ pätee

a) $a_k \geq a_{k+1}$

b) $a_k - a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_{k+2}$

Huomaa, että kuvaus f^k tarkoittaa tässä yhdistettyä kuvausta $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{n kpl}}$.

Siis $f^{k+1}X = f(f^k X)$ jne.

Ratkaisu.
a) Kuvajoukon määritelmän[1] nojalla kuvaus f rajoittuu surjektioksi joukolta $f^k X$ joukkoon $f^{k+1}X$ kaikilla $k \geq 1$, joten (Lause 1.3., s. 5) $|f^k X| \geq |f^{k+1}X|$. Toisin sanoen $a_k \geq a_{k+1}$ eli väite on osoitettu.

b) Todistuksessa tarvitaan muutamia aputuloksia:
i) $A \subset B \implies fA \subset fB$, sillä jos $x \in fA$, niin $x = f(a)$ jollakin $a \in A$. Toisaalta $a \in B$, joten $x \in fB$.

ii) Todistetaan induktiolla, että $f^{k+1}X \subset f^k X$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$. Oletuksen mukaan $fX \subset X$, joten väite pätee, kun $k = 0$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $k = n$ eli $f^{n+1}X \subset f^n X$. Todistetaan väite, kun $k =$

[1] Kuvaus $f : A \longrightarrow fA$ on aina surjektio!

$n+1$ eli tavoitteenamme osoittaa $f^{n+2}X \subset f^{n+1}X$.
Nyt $f^{n+2}X = f(f^{n+1}X) \overset{i),i.o.}{\subset} f(f^n X) = f^{n+1}X$. Siis on osoitettu, että

$$f^{k+1}X \subset f^k X \text{ kaikilla } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Huomaa, että aputuloksesta ii) seuraa, että kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ pätee

$$|f^k X \setminus f^{k+1}X| = |f^k X| - |f^{k+1}X| := a_k - a_{k+1}.$$

Palataan nyt tehtävän väitteeseen.

Väite on yhtäpitävä sen kanssa, että $|f^k X \setminus f^{k+1}X| \geq |f^{k+1}X \setminus f^{k+2}X|$. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvaus $f^k X \setminus f^{k+1} \longrightarrow f^{k+1}X \setminus f^{k+2}$ on surjektio (aputuloksien seuraus ja Lause 1.3., s. 5).

Merkitään $A = f^k X$, jossa $k = 0, 1, 2, \ldots$ on mielivaltainen. Nyt A ja fA voidaan kirjoittaa erillisten joukkojen yhdisteenä: $A = (A \setminus fA) \cup fA$ ja $fA = (fA \setminus f(fA)) \cup f(fA)$. Koska f on surjektio, niin joukon $A \setminus fA$ täytyy kuvautua surjektiivisesti joukolle $fA \setminus f(fA)$ (piirrä kuva tilanteesta!), sillä niin ikään $f : fA \longrightarrow f(fA)$ on surjektio.

Olemme siis todistaneet, että joukko $f^k X \setminus f^{k+1}X$ kuvautuu surjektiivisesti joukolle $f^{k+1}X \setminus f^{k+2}X$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots$. Näin ollen $a_k - a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_{k+2}$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots$.