

Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 1

1. Osoita, että vuoden 2010 jalkapallon MM-turnauksessa niiden joukkueiden lukumäärä, jotka pelasivat parittoman määrän otteluita oli parillinen.

[Vihje: kuhunkin pelattuun otteluun osallistui tasan kaksi joukkuetta. Jos $|S|$ on pariton luku ja kullekin $s \in S$ on annettu pariton luku $f(s)$, niin summa $\sum_{s \in S} f(s)$ on pariton.]

2. Kuinka monella tavalla

- a) 10 henkilöä voidaan jakaa 4:n ja 6:n hengen ryhmiin?
- b) 10 henkilöä voidaan jakaa kahteen 5:n hengen joukkueeseen?

3. Kuinka moni joukon $[8] = \{1, 2, \dots, 8\}$ permutaatio kuvaa kaikki parilliset luvut parittomille luvuille?

4. Kuinka monta 7:n merkin pituista merkkijonoa voidaan muodostaa numeroista 1 – 7, kun suurempi pariton numero ei saa koskaan esiintyä ennen pienempää paritonta numeroa?

5. Olkoon X äärellinen joukko ja $f : X \rightarrow X$ kuvaus. Määritellään lukujono (a_0, a_1, \dots) seuraavasti:

$$a_k = \begin{cases} |X|, & \text{kun } k = 0 \\ |f^k X|, & \text{kun } k \geq 1. \end{cases}$$

Osoita että kaikilla $k \geq 0$ pätee

- a) $a_k \geq a_{k+1}$
- b) $a_k - a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_{k+2}$

Kombinatoriikan kurssi suoritetaan loppukokeella ja laskuharjoitusten tekemisestä saa lisäpisteitä.