Kombinatoriikka

Robert Service

Lista käytetyistä merkinnöistä

$\mathbf{Z}$	kokonaislukujen joukko
$[n]$	joukko $\{1, 2, \dots, n\}$, erityisesti $[0] = \emptyset$
$\mathbf{N}$	luonnollisten lukujen joukko, $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbf{N}^\star$	positiivisten kokonaislukujen joukko, $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbf{R}$	reaalilukujen joukko
$\lfloor x \rfloor$	x pyöristettynä alas lähimpään kokonaislukuun
$\lceil x \rceil$	x pyöristettynä ylös lähimpään kokonaislukuun
$\binom{a}{b}$	binomikerroin, $\frac{a!}{b!(a-b)!}$
$n!$	kertoma, $1 \cdot 2 \cdots n$. Erikseen asetetaan $0! = 1$.
$(n)_k$	laskeva k termin tulo $n(n-1)\cdots(n-k+1)$
$\emptyset$	tyhjä joukko
$A \subseteq B$	A on B:n osajoukko
$A \subsetneq B$	A on B:n aito $(A \neq B)$ osajoukko
$\mathcal{P}(A)$	joukon A kaikkien osajoukkojen joukko
$A^{(n)}$	joukon A k-osajoukkojen joukko
$\|A\|$	joukon A alkioiden lukumäärä eli mahtavuus
$\#A$	sama kuin $\|A\|$
$Map(X, Y)$	kaikkien kuvausten $X \to Y$ joukko
$Inj(X, Y)$	kaikkien injektioiden $X \to Y$ joukko
$Sur(X, Y)$	kaikkien surjektioiden $X \to Y$ joukko
$G(f)$	funktion f kuvaaja
S_X	kaikkien bijektioiden $X \to X$ joukko
S_n	joukon $\{1, \dots, n\}$ permutaatioiden joukko, $S_{[n]}$

Sisältö

Johdanto

Kombinatoriikka on kokonaisuudessaan vaikeasti määriteltävä matematiikan ala; vähintäänkin se käsittää monenlaiset äärellisiä joukkoja, niiden relaatioita, osajoukkoja sekä niiden välisiä kuvauksia koskevat kysymykset. Tällä kurssilla käsitellään suurimmaksi osaksi kombinatoriikan klassisinta osaa, jossa keskeisin ongelma on annetun joukon mahtavuuden määrittäminen. Tyypillinen ongelma on esimerkiksi seuraava:

0.1. Ongelma. *Juhliin saapuu n henkilöä kullakin mukanaan lahja. Kuinka monella tavalla lahjat voidaan jakaa vieraiden kesken siten, että kukin saa yhden lahjan, mutta kukaan ei saa omaa lahjaansa?*

Tämän ongelman ratkaisu käsitellään kokonaisuudessaan myöhemmin, mutta ratkaistaan se välittömästi tapauksissa $n = 1, 2, 3$ ja päästään heti kiinni "kombinatoriseen" ajatteluun. Ensinnäkin, jos vieraita on vain yksi, on mahdotonta täyttää ehdot, että vieras saa yhden lahjan, muttei omaansa. Vastaus laskentatehtävään on siis "nolla".

Jos vieraita on kaksi, sanokaamme A, B on selvää että A:n tuoma lahja annetaan B:lle ja B:n tuoma lahja A:lle, eli lahjojen jakomenettelyjä on nyt yksi. Oletetaan nyt että vieraita on kolme, A, B ja C. Jos annamme A:lle B:n tuoman lahjan, on C:n tuoma lahja jaettava vuorostaan B:lle, jotta C ei saisi itse tuomaansa lahjaa. Tällöin tietysti A:n tuoma lahja annetaan C:lle. Vastaavasti, jos A:lle annetaan C:n tuoma lahja, on annettava B:n tuoma lahja C:lle ja A:n tuoma lahja B:lle. Menettelytapoja on siis kaksi.

1. Äärelliset joukot

Luonnolliset luvut, äärelliset joukot ja niiden väliset kuvaukset, summan ja tulon säännöt, rekursiivisesti määritellyt funktiot

1.1. Luonnolliset luvut ja laskeminen. Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään yleensä symbollilla $\mathbf{N}$, mutta yksimielisyyttä ei ole siitä tarkoitetaanko tällä joukkoa $\{1, 2, 3 \ldots\}$ vai $\{0, 1, 2 \ldots\}$. Kombinatoriikan kirjallisuudessa useimmiten nojataan edelliseen käytäntöön, mutta seuraamme tällä kurssilla käytäntöä että

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

jolloin on kätevä määritellä

$$\mathbf{N}^\star = \{1, 2, 3 \ldots\}.$$

Luonnollisten lukujen ensimmäinen ja tärkein käyttötarkoitus on lukumäärien laskeminen. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Asetetaan $[n] = \{k \in \mathbf{N}^\star : k \leq n\}$ eli epämuodollisemmin ilmaistuna $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Tämän määritelmän mukaan siis erityisesti $[0] = \emptyset$. Nyt voimme asettaa seuraavan määritelmän.

1.1. Määritelmä. *Joukko X on äärellinen, jos on olemassa jokin $n \in \mathbf{N}$ ja bijektio $f : [n] \to X$.*

Tämä vastaa arkielämän käytäntöä: jos joukko on äärellinen, voimme "laskea" sen alkiot, eli muodostaa bijektion jonkin joukon $[n]$ kanssa. Seuraavaa lausetta emme todista tässä, vaan otamme sen lähtökohdaksi äärellisen kombinatoriikan perusteille.

1.2. Lause. *Olkoot $m, n \in \mathbf{N}$. Tällöin*

(1) *On olemassa bijektio $f : [m] \to [n]$ jos ja vain jos $m = n$.*
(2) *On olemassa injektio $f : [m] \to [n]$ jos ja vain jos $m \leq n$.*
(3) *On olemassa surjektio $f : [m] \to [n]$ jos ja vain jos $m \geq n$.*

Olkoon X äärellinen joukko. On intuitiivisesti selvää, että on olemassa tasan yksi $n \in \mathbf{N}$ jolle on olemassa bijektio $f : [n] \to X$. Tämän väitteen voi todistaakin lähtien lausesta 1.2 : Olkoot nimittäin $m, n \in \mathbf{N}$ sellaisia, että on olemassa bijektiot $f : [m] \to X$ ja $g : [n] \to X$. Tällöin $g^{-1} \circ f : [m] \to [n]$ on bijektio, joten lauseen 1.2 nojalla $n = m$. Äärellisen joukon X mahtavuus $|X|$ on yksikäsitteinen luku n, jolla on olemassa bijektio $[n] \to X$. Joukkoa, jonka mahtavuus on n sanotaan lyhyesti n-joukoksi. Mainitaan tässä tärkeä vertailuperiaate, jonka voi niinikään todistaa lauseen 1.2 avulla käyttäen hyväksi sopivia bijektioita.

1.3. Lause (Vertailuperiaate). *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Tällöin*

(1) *On olemassa bijektio $f : X \to Y$ jos ja vain jos $|X| = |Y|$.*
(2) *On olemassa injektio $f : X \to Y$ jos ja vain jos $|X| \leq |Y|$.*
(3) *On olemassa surjektio $f : X \to Y$ jos ja vain jos $|X| \geq |Y|$.*

1.4. Esimerkki. *Arkisena esimerkkinä vertailuperiaatteesta oletetaan että meillä on joukko kirjekuoria ja joukko postimerkkejä. Kiinnitämme yhden postimerkin kuhunkin kuoreen kunnes huomaamme, että kuoret loppuvat kesken. Voimme vakuuttua laskematta kuoria ja merkkejä, ettei kuoria voinut olla enemmän kuin postimerkkejä.*

Kaikessa yksinkertaisuudessaan vertailuperiaate on kenties tärkein yksittäinen kombinatoriikan työkalu. Kombinatorisissa laskentatehtävissä sitä sovelletaan yleensä joukkoperheisiin (X_k) ja (Y_k), missä esimerkiksi parametri $k \in \mathbf{N}$, jolloin bijektion $X_k \to Y_k$ määritteleminen joukkojen X_k ja Y_k määritelmien perusteella voi vaatia kekseliäisyyttä.

Väitteen $|Y_k| = |X_k|$ todistusta bijektion avulla kutsutaan bijektiiviseksi todistukseksi. On lukuisia esimerkkejä laskentatehtävistä, missä yhtälö $|Y_k| = |X_k|$ on osoitettu muilla keinoin, mutta mitään tunnettua bijektiota ei ole löydetty.

1.2. Summan ja tulon periaatteet. Tärkeä menetelmä joukon mahtavuuden määrittelemisessä on joukon jakaminen erillisiin osajoukkoihin sellaisella tavalla, että osaamme laskea kunkin osajoukon mahtavuuden. Seuraava lause on lähes selviö, mutta todistetaan se täydellisyyden vuoksi.

1.5. Lause. *Olkoot X ja Y äärellisiä erillisiä (ts. $X \cap Y = \emptyset$) joukkoja. Tällöin $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.*

Todistus. Merkitään $|X| = m$ ja $|Y| = n$. Joukon $A = \{m+1, m+2, \ldots, m+n\}$ mahtavuus on n sillä kuvaus $k \mapsto m + k$ on bijektio $[n] \to A$. Täten on olemassa bijektiot $f_1 : [m] \to X$ ja $f_2 : A \to Y$. Määritellään kuvaus $f : [m + n] \to X \cup Y$ asettamalla $f(k) = f_1(k)$, kun $k \leq m$ ja $f(k) = f_2(k)$, kun $k \in A$. Koska joukot $[n]$ ja A ovat erillisiä ja $[m] \cup A = [n + m]$ edellinen määritelmä toimii. On helppo todeta, että f on bijektio, jolloin väite on tullut todistettua. $\square$

1.6. Esimerkki. *Hedelmäkorissa on m omenaa ja n appelsiinia (eikä muita hedelmiä). Hedelmiä on tällöin $m + n$.*

Käyttämällä induktiota saadaan edellisestä lauseesta helposti todistettua seuraava yleisempi muotoilu.

1.7. Lause. *Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ äärellisiä erillisiä (ts. $X_i \cap X_j = \emptyset$, kun $i \neq j$) joukkoja. Tällöin $|\bigcup_{k=1}^{n} X_k| = \sum_{k=1}^{n} |X_k|$.*

1.8. Lause. *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Tällöin $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.*

Todistus. Olkoon taas $|X| = m$ ja $|Y| = n$. Kullekin $x \in X$ merkitään $Y_x = \{(x, y) : y \in Y\}$. Tällöin joukot Y_x ovat erillisiä, niitä on m kappaletta ja $X \times Y = \bigcup_{x \in X} Y_x$. Selvästi $|Y_x| = n$ kaikilla $x \in X$, joten $|X \times Y| = \sum_{x \in X} |Y_x| = mn$. $\square$

Aivan kuten lauseesta 1.5 saatiin 1.7 voidaan induktiolla johtaa lauseesta 1.8 johtaa helposti seuraava yleisempi versio.

1.9. LAUSE. *Olkoot $X_1, \dots, X_n$ äärellisiä joukkoja. Tällöin $|X_1 \times \cdots \times X_n| = \prod_{k=1}^{n} |X_k|$.*

1.10. ESIMERKKI. *Kahvilassa lounspatongin tilaaja saa valita leipälaadun 3 vaihtoehdosta, täytteen 5 vaihtoehdosta ja salaattikastikkeen 2 vaihtoehdosta. Mahdollisia patonkikokonaisuuksia on tarjolla siis yhteensä $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.*

Usein tuloperiaatetta tarvitaan joustavammassa muodossa, nimittäin niin että joukkoja X_k, kun $k \geq 2$ ei ole annettu sellaisenaan vaan X_k riippuu edellisten alkioiden $x_1, \dots, x_{k-1}$ valinnasta, mutta $|X_k|$ ei. Jos siis x_1 voidaan valita a_1 tavalla, sen jälkeen x_2 a_2 tavalla ja niin edelleen, niin jono $(x_1, \dots, x_n)$ voidaan valita $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ tavalla. Sovelluksena tästä, todistetaan seuraava lause:

1.11. LAUSE. *Injektioita k-joukolta joukolta n-joukolle on $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.*

TODISTUS. Olkoon $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ k-joukko ja Y n-joukko. Tällöin jokaista injektiota $f : X \to Y$ vastaa yksikäsitteisesti jono $(f(x_1), \dots, f(x_k))$ missä $f(x_k) \in Y$ ovat kaikki eri alkioita. Täten voimme valita alkion $f(x_1)$ n tavalla, alkion $f(x_2)$ $n-1$ ja niin edelleen. □

1.12. ESIMERKKI. *Kuinka monella tavalla viisi tiskivuoroa voidaan jakaa yhdeksälle henkilölle niin, että kukaan ei joudu tiskamaan useammin kuin kerran?*

Tiskivuorojen jakaminen vastaa kuvausta tiskivuorojen joukoilta henkilöiden joukolle. Vaatimus, että kukaan ei tiskaa kertaa enempää vastaa vaatimusta että kyseinen kuvaus on injektio. Vastaukseksi saadaan siis Injektioiden lukumäärä eli

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120.$$

Otetaan käyttöön merkintä $(x)_k$ tulolle $x(x-1)\cdots(x-k+1)$. Käytämme tässä kirjainta x muistuttamassa siitä, ettei kysesen muuttujan tarvitse saada kokonaislukuarvoa, vaan $(x)_k$ on määritelty aina, kun $x \in \mathbf{R}$ ja $k \in \mathbf{N}^\star$. Myöhemmin käsittelemme lauseketta $(x)_k$ muuttujan x polynomina.

Perinteisesti kombinatoriikassa jonoja $(x_1, \dots, x_k)$, joissa sama alkio ei toistu sanotaan k-permutaatioiksi. Voimme siis tulkita lauseen 1.11 sisällöksi, että n-joukon k-permutaatioiden lukumäärä on $(n)_k$.

1.13. ESIMERKKI. *Korttipakasta (52 korttia) nostetaan viisi korttia, yksi kerrallaan palauttamatta kortteja pakkaan. Tämä voidaan tehdä $(52)_5 = 311875200$ tavalla, kunkorttien järjestys otetaan huomioon.*

Tärkeä erikoistapaus tuloperiaatteesta on kun joukot X_k ovat kaikki samoja, mistä saadaan $|X^n| = |X|^n$. On selvää, että tulojoukon mahtavuus ei muutu, kun indeksien nimiä muutetaan, vaan riippuu ainoastaan tulossa esiintyvien joukkojen mahtavuuksista (todista tämä sopivalla bijektiolla!). Niinpä tuloperiaate saa seuraavan muotoilun:

1.14. LAUSE. *Kuvauksia k-joukolta X n-joukolle Y on n^k.*

Kun X joukko, X:n kaikkien osajoukkojen joukkoa X potenssijoukoksi ja sille käytetään merkintää $\mathcal{P}(X)$. Tähän liittyen, kaikkien X:n k-sajoukkojen joukkoa merkitään $X^{(k)}$. Täten potenssijoukko voidaan esittää erillisenä yhdisteenä

$$\mathcal{P}(X) = \bigcup_{k=0}^{n} X^{(k)},$$

missä $|X| = n$.

Kun kiinnitetään jokin perusjoukko X, kunkin osajoukon $Y \in \mathcal{P}(X)$ karakteristinen funktio $\chi_Y : X \to \{0,1\}$ määritellään asettamalla

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in Y \\ 0 & \text{kun } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

On helppo tarkistaa, että kuvaus $Y \mapsto \chi_Y$ on bijektio $\mathcal{P}(X) \to Map(X, \{0,1\})$, joten tuloperiaatteen nojalla saamme seuraavan tuloksen:

1.15. Lause. *Jos X on n-joukko, niin X:llä on 2^n osajoukkoa.*

1.3. Kombinatoriset laskentatehtävät ja induktio. Joukon osajoukkojen lukumäärän laskeminen on tyyppiesimerkki kombinatorisesta laskentatehtävästä: on annettu diskreetin muuttujan k parametrisoima perhe (X_k) joukkoja ja tehtävänä on määrittää funktio $f(k) = |X_k|$. Kun kyse on kaikkien osajoukkojen laskemisesta, on $X_k = \mathcal{P}([k])$ ja edellä todettiin, että $f(k)$:n arvot antaa yksinkertainen kaava $f(k) = 2^k$. Myöhemmin näemme esimerkkejä missä f:lle saadaan rekursiivinen määritelmä, eli $f(k)$ on jokin tunnettu muuttujien $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$ funktio. Kolmas tapa määrittää funktio f on löytää jollekin f:n avulla määritellylle potenssisarjalle esimerkiksi

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)x^k$$

jokin esitys tunnetujen funktioiden avulla. Funktiota F kutsutaan f:n (tavalliseksi) generoivaksi funktioksi. Viimeksimainittu saattaa ensikatsomalta tuntua huonosti motivoidulta tavalta tarkastella kombinatorista kysymystä. Generoivien funktioiden tarkastelu osoittautuu kuitenkin erittäin tehokkaaksi työkaluksi, johon tutustutaan myöhemmässä kappaleessa.

Kaikkien kuvausten $[n] \to [k]$ laskeminen on esimerkkitehtävästä, jossa tarkasteltava joukko $Map([n],[k])$ riippuu kahdesta parametrista. Tällöin vastaavalle funktiolle $f(n,k)$ voidaan etsiä esitys, joka on rekursiivinen yhden tai molempien muuttujien suhteen ja vastaavasti voidaan tarkastella generoivaa funktiota yhden tai kahden muuttujan suhteen.

Kombinatorisissa laskentatehtävissä päädytään usein rekursiivisiin kaavoihin. Tämä tarkoittaa, yhden muuttujan tapauksessa, että funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ arvo pisteessä $n \geq 1$ saadaan jonkin tunnetun funktion avulla arvoista $f(0), f(1), \ldots, f(n-1)$. Jos kaksi funktiota toteutaa saman rekursion samalla alkuarvolla, niin funktiot yhtyvät. Täsmällisemmin ilmaistuna saadaan seuraava lause:

1.16. LAUSE (Induktioperiaate). *Olkoon* $x_0 \in \mathbf{N}$ *ja kullekin* $n \geq 1$ *funktio* $\varphi_n : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$. *Tällöin on olemassa tasan yksi funktio* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *joka toteuttaa ehdot:*

$$f(0) = x_0 \text{ ja}$$
$$f(n) = \varphi_n(f(0), f(1), \ldots, f(n-1)).$$

TODISTUS. Se, että annetut ehdot täyttävä funktio on olemassa voidaan todistaa joukko-opin aksioomista, mutta sivuutamme tämän ja toteamme, että on intuitiivisesti selvää, että f voidaan määritellä edellä esitetyllä tavalla.

Oletetaan nyt, että funktio f toteuttaa annetut ehdot. Oletetaan, että myös funktio g toteuttaa ehdot $g(0) = x_0$ ja

$$g(n) = \varphi_n(g(0), g(1), \ldots, g(n-1)).$$

Osoitetaan, että $f = g$, eli $f(n) = g(n)$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Oletetaan, ettei näin ole. Tällöin niiden lukujen joukossa, joille $f(n) \neq g(n)$ on pienin alkio: kutsutaan tätä nyt n:llä. Oletuksen nojalla $f(k) = g(k)$ kaikilla $k < n$, joten

$$f(n) = \varphi_n(f(0), f(1), \ldots, f(n-1))\varphi_n(g(0), g(1), \ldots, g(n-1)) = g(n),$$

mikä on ristiriita. Siis $f(n) = g(n)$ kaikille $n \in \mathbf{N}$. □

Kombinatoriikassa funktioita $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ajatellaan yleensä lukujonoina, eli $f(n)$:n sijasta kirjoitetaan f_n. Koko jonoa merkitään tällöin $(f_n) = (f_0, f_1, \ldots)$. Induktioperiaatetta voi myös käyttää, kun annetaan useampi alkuarvo $f_0, f_1, \ldots, f_k$ ja määritellään f_n, $n > k$ indutiolla.

1.17. ESIMERKKI. *On olemassa tasan yksi lukujono* (F_n), *joka toteuttaa ehdot* $F_0 = F_1$ *ja* $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. *Lukuja* F_n *kutsutaan Fibonaccin luvuiksi.*

1.18. ESIMERKKI. *On olemassa tasan yksi lukujono* (C_n), *joka toteuttaa ehdot* $C_0 = 1$ *ja* $\sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}C_{n-k}$. *Lukuja* C_n *kutsutaan Catalanin luvuiksi.*

Olemme jo käyttäneet kertomafunktiota $n! = n(n-1)\cdots 1$, kun $n \geq 1$. Kertomafunktio toteuttaa ehdot $1! = 1$ ja $n! = n(n-1)!$, kun $n \geq 2$. Tämä antaa aiheen määritellä $0! = 1$, nimittäin tällöin mainittu rekursio toimii myös tapauksessa $n = 1$, eli $1! = 1(0)!$. Näemme myöhemmin, että tämä määritelmä toimii myös hyvin kombinatoriikan sovelluksissa.

1.4. Talojen maalaamisongelma. Ratkaistaan esimerkin vuoksi vaativampi ongelma, jossa rekursion avulla saadaan lopulta eksplisiittinen esitys vastaukselle.

1.19. ONGELMA. *Kehätien varrella on* $n \geq 2$ *taloa jolloin jokaisella talolla on kaksi naapuria. Talot halutaan maalata niin, että naapureiden talot ovat erivärisiä. Kuinka monella tavalla tämä voidaan tehdä, kun käytettävissä on* k *eri väriä?*

Merkitään koko seuraavan osion ajaksi ongelmassa 1.19 kysyttyä lukua $c(n, k)$:lla. Olkoon talojen joukko $t_1, \ldots, t_n$, missä talot on numeroitu myötäpäivään kehällä. Talojen värien valitsemisen voi ajatella funktiona $f : \{t_1, \ldots, t_n\} \to C$, missä k-joukko C on värien joukko. Ehto, että naapurit ovat erivärisiä tarkoittaa nyt , että

$f(t_i) \neq f(t_j)$, kun $|i-j| = 1$ tai $i = n$ ja $j = 1$. Aloitetaan ratkaisemalla helpotettu versio ongelmasta.

1.20. Lemma. *Oletetaan, että talot $t_1, \ldots, t_n$ ovat suoralla tiellä niin, että t_i ja t_j ovat naapureita täsmälleen, kun $|i-j| = 1$. Jos käytettävissä olevien värien lukumäärä on k, niin talot voi maalata $k(k-1)^{n-1}$ tavalla niin, että naapurit saavat eri värit.*

Todistus. Maalataan talot järjestyksessä $t_1, \ldots, t_n$. Talon t_1 värin $f(t_1)$ voi valita vapaasti joukosta C. Seuraavaksi talon t_2 värin $f(t_2)$ voi valita vapaasti joukosta $C \setminus \{f(t_1)\}$. Yleisesti, kun talot $t_1, \ldots, t_i$ on maalattu ja $i < n$, talon t_{i+1} voi maalata millä hyvänsä värillä joukosta $C \setminus \{f(t_k)\}$. Täten ensimmäinen talo voitiin maalata k tavalla ja loput $n-1$ taloa $k-1$ värillä. Tuloperiaatteen nojalla talot voi kokonaisuudessaan siis värittää $k(k-1)^{n-1}$ tavalla. □

Naiivi lähestyminen alkuperäiseen ongelmaan olisi seuraava: maalataan talo t_1 jollakin k väreistä, talot $t_2, \ldots, t_{n-1}$ kukin $k-1$ värillä ja lopulta talo t_n jollakin $k-2$ väreistä $C \setminus \{f(t_{n-1}), f(t_1)\}$. Ongelma tässä on seuraava: mikään ei estä taloja t_1 ja t_{n-1} olemasta samanvärisiä. Riippuu siis siitä, miten talot $t_1, \ldots, t_{n-1}$ on maalattu onko käytettävissä $k-1$ vai $k-2$ väriä talolle t_n. Voimme kuitenkin käyttää summaperiaatetta ja tarkastella näitä tapauksia erikseen.

1.21. Lemma. *Olkoon $n \geq 3$ ja $k \geq 2$. Tällöin on yhtä monta tapaa suorittaa seuraavat kaksi tehtävää k värillä:*

i) *Maalataan suoralla tiellä olevat n peräkkäistä taloa $t_1, \ldots, t_n$ niin, että naapurit saavat eri värit, mutta päädyissä olevat talot t_1 ja t_n saavat saman värin.*
ii) *Maalataan kehätien varrella olevat talot $t_1, \ldots, t_{n-1}$ niin, että naapurit saavat eri värit.*

Todistus. Aloitetaan jostakin tavasta suorittaa tehtävä ii): kehätiellä olevat talot $t_1, \ldots, t_{n-1}$ on maalattu annetulla tavalla voidaan. Nyt voidaan lisätä uusi talo t_n ja maalata se talon t_1 värillä. Päätytaloilla t_1 ja t_n on samat värit, joten taloilla t_{n-1} ja t_n on myös eri värit. Jos samat talot sijoitetaan nyt suoran tien varrelle annetussa järjestyksessä seurauksena on siis tapa suorittaa tehtävä i).

Oletetaan nyt, että tehtävä i) on suoritettu, eli suoralla tiellä olevat talot $t_1, \ldots, t_n$ on maalattu niin, että naapureilla on eri värit, mutta päätytaloilla t_1 ja t_n on sama väri. Poistetaan talo t_n. Taloilla t_1 ja t_{n-1} on eri värit, joten samat talot voidaan sijoittaa kehätien varrelle niin, että saadaan tapa suorittaa tehtävä ii). □

1.22. Lemma. *Luvut $c(n,k)$ toteuttavat seuraavan rekursion, kun $n \geq 3$:*

$$c(n,k) = k(k-1)^{n-1} - c(n-1,k).$$

Todistus. Jos talot $t_1, \ldots, t_n$ sijaitsevat suoralla tiellä, on kahdenlaisia tapoja maalata ne k värillä niin, että naapurit saavat eri värit. Jos talot maalataan niin, että päätytalot saavat eri värit, tehtävä voidaan suorittaa $c(n-1,k)$ tavalla lemman 1.21 nojalla. Kun päätytalot saavat eri värit, tämä vastaa ongelmaa jossa talot ovat kehätiellä. Ratkaisuja, joissa päätytalot saavat eri värit on siis $c(n,k)$. Toisaalta tapoja maalata talot niin, että naapurit saavat eri värit on yhteensä $k(k-1)^{n-1}$, joten summaperiaatteen nojalla $c(n-1,k)+c(n,k)=k(k-1)^{n-1}$ □

1.23. Lause. *Kehätien varrella olevat $n \geq 2$ taloa voidaan maalata*

$$c(n,k) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} k(k-1)^{n-i}$$

värillä niin, että naapurit saavat eri värit.

Todistus. Merkitään oikealla puolella olevan lausekkeen arvoa $d(n,k)$:llä. Tarkastellaan ensin kahden talon tapausta. Ensimmäinen talo voidaan maalata k värillä ja toinen jollakin jäljellä olevista $k-1$ väreistä, joten $c(2,k)=k(k-1)=d(2,k)$. Osoitetaan, että luvut $d(2,k)$ toteuttavat lemman 1.22 rekursion. Olkoon $n \geq 3$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(n,k) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} k(k-1)^{n-i} &= k(k-1)^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i+1} k(k-1)^{n-i} \\ &= k(k-1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i+2} k(k-1)^{n-i-1} \\ = k(k-1)^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i+1} k(k-1)^{(n-1)-i} &= k(k-1)^{n-1} - d(n-1,k). \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla siis $c(n,k)=d(n,k)$ kaikilla $k \geq 2$. □

Huomautuksena mainittakoon, että kun $k=2$, summassa $\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}k(k-1)^{n-i}$ esiintyy vuorottelevin etumerkein luku 2. Summassa esiintyy $n-1$ termiä. Jos siis n on pariton on plus- ja miinusmerkkisiä termejä yhtä monta, eli $c(n,2)=0$. Kun n on parillinen on positiivisia termejä yksi enemmän kuin negatiivisia, joten tällöin $c(n,2)=2$.

2. Binomikertoimien sovelluksia

Permutaatiot ja kombinaatiot, binomikertoimet

2.1. Permutaatiot ja binomikertoimet. Kombinatoriikassa sanaa permutaatio käytetään usein kahdessa toisistaan hieman poikkeavassa mielessä. Ensinnäkin äärellisen joukon X permutaatio on jono $(x_1, \ldots, x_n)$, missä $n = |X|$ ja $x_i \neq x_j$ kun $i \neq j$. Toisaalta permutaatiolla tarkoitetaan joukon bijektiota itselleen. Jos epäselvyyttä esiintyy, kutsutaan ensimmäistä tyyppiä olevia permutaatioita passiivisiksi ja jälkimmäisiä aktiivisiksi permutaatioiksi. Aktiivisia ja passiivisia permutaatioita on yhtä paljon. Jos nimittäin numeroimme X:n alkiot $x_1, \ldots, x_n$ jokaista aktiivista permutaatiota $\pi : X \to X$ vastaa yksikäsitteisesti passiivinen permutaatio $(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))$. Permutaatioiden lukumäärän antaa kertymäfunktio $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

2.1. Lause. *Joukon $[n]$ permutaatioiden lukumäärä on $n!$.*

Todistus. Jokainen injektio $[n] \to [n]$ on bijektio. Permutaatioiden lukumäärä on siis Lauseen 1.11 nojalla $n!$. $\square$

Edellinen lause ratkaisee helpotetun version johdannossa esiintyneestä ongelmasta. Jos nimittäin n vierasta saapuu juhliin lahjoineen, niin jokainen lahjojen jakotapa, jossa kukin vieras saa yhden lahjan vastaa permutaatiota joka kuvaa lahjan tuojan sen saajalle. Lahjat voidaan siis jakaa $n!$ tavalla, jos vieraat voivat saada oman lahjansa.

2.2. Esimerkki. *Kuinka monessa joukon $[n]$ permutaatiossa $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ luvut 1 ja 2 esiintyvät peräkkäin?*

Valitaan ensin kumpi luku b tulee ensin 1 vai 2. Sitten valitaan mille paikoista $1, 2, \cdots, n-1$ luku b tulee. Tämä määrää lukujen 1 ja 2 paikat permutaatiossa yksikäsitteisesti ja valinnat voidaan siis tehdä $2 \cdot (n-1)$ tavalla. Nyt jonoon on sijoitettava jäljellä olevat $n-2$ lukua $n-2$ paikalle, mikä voidaan tehdä $(n-2)!$ tavalla. Tuloperiaatteen nojalla kysytynlaisia permutaatioita on siis

$$2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$$

2.3. Määritelmä. *Kun $x \in \mathbf{R}$ ja $k \in \mathbf{N}$ määritellään binomikertoimet kaavalla*

$$\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!}.$$

Tässä on voimassa aiemmin mainitsemamme tulkinta $0! = 1$.

Kombinatoriikassa binomikertoimia tarvitaan erityisesti, kun $n, k \in \mathbf{N}$. Tällön, kun $k \leq n$ binomikertoimet voidaan kirjoittaa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tapauksessa $k > n$ on $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = 0$, jolloin myös $\binom{n}{k} = 0$. Tärkein syy binomikertoimien määritelmälle on seuraava:

2.4. Lause (Binomikertoimien kombinatorinen tulkinta). *Olkoot $n, k \in \mathbf{N}$. Tällöin joukon $[n]$ k-osajoukkoja on $\binom{n}{k}$.*

Todistus. Kun $k > n$, joukolla $[n]$ ei ole k-osajoukkoja lainkaan ja toisaalta myös $\binom{n}{k} = 0$. Väite siis pätee tässä tapauksessa. Oletetaan nyt, että $k \leq n$.

Olkoon S kaikkien joukon $[n]$ k-osajoukkojen joukko. Jokainen $A \in S$ on joukon $[k]$ kuva jollakin injektiolla $[k] \to [n]$, joka rajoittuu bijektioksi $[k] \to A$. Koska bijektioita $[k] \to A$ on tällöin $k!$, jokaista k-osajoukkoa $A \in S$ vastaa $k!$ injektiota. Toisaalta injektioita $[k] \to [n]$ on Lauseen 1.11 nojalla $\frac{n!}{(n-k)!}$, joten

$$|S|k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

mistä väite saadaan ratkaisemalla $|S|$. □

2.5. Esimerkki. *Korttipakasta (52 korttia) jaetaan pelaajalle viiden kortin käsi. Koska korttien järjestyksellä ei ole väliä, tämä vastaa 5-osajoukon valintaa ja voidaan tehdä $\binom{52}{5} = 2598960$ tavalla.*

2.6. Esimerkki. *Kymmenhenkiseen hallitukseen on valittava vähintään neljä miestä ja neljä naista. Kuinka monella tavalla hallitus voidaan valita, kun miesehdokkaita on m ja naisehdokkaita n?*

Selvästi hallitukseen on valittava joko $4, 5$ tai 6 miestä. Tarkastellaan näitä tapauksia erikseen.

i) *Kun miehiä on 4, naisia on oltava 6. Miehet voidaan valita $\binom{m}{4}$ tavalla ja naiset $\binom{n}{6}$ tavalla, joten tuloperiaatteen nojalla koko hallitus voidaan valita $\binom{m}{4}\binom{n}{6}$ tavalla.*
ii) *Kun miehiä on 5, myös naisia on 5, joten tapauksia on taas tuloperiaatteen nojalla $\binom{m}{5}\binom{n}{5}$.*
iii) *Vastaavasti, kun miehiä on 6, tapauksia on $\binom{m}{6}\binom{n}{4}$*

Yhteensä siis hallitus voidaan valita $\binom{m}{4}\binom{n}{6} + \binom{m}{5}\binom{n}{5} + \binom{m}{6}\binom{n}{4}$ tavalla.

Binomikertoimia tarvitaan myös monissa erilaisten jonojen ja permutaatioiden laskemiseen liittyvissä tehtävissä, mitä valoittanee seuraava seurauslause.

2.7. Seurauslause. *Niiden n pituisten 0-1-jonojen lukumäärä, joissa 1 esiintyy tasan k kertaa on $\binom{n}{k}$.*

Todistus. Jokaista 0-1-jonoa $(a_1, \ldots, a_n)$ vastaa yksikäsitteisesti niiden indeksien i joukko joilla $a_i = 1$. Jos luvun 1 on esiinnyttävä k kertaa, kyseinen indeksijoukko $I \subseteq [n]$ voidaan valita $\binom{n}{k}$ tavalla. □

Käyttämällä binomikertoimien kombinatorista tulkintaa k-osajoukkojen lukumääränä voimme antaa kombinatorisia todistuksia binomikertoimia koskeville identiteeteille, jotka muuten vaatisivat työläitä induktiotodistuksia tai (kuten myöhemmin näemme) laskutoimituksia generoivilla funktioilla. Esimerkiksi todistamme seuraavan väitteen.

2.8. Lause.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Todistus. Jokainen n-joukon osajoukko on k-joukko jollakin $k \leq n$. Koska osajoukkoja on yhteensä 2^n, väite seuraa summaperiaatteesta ja binomikertoimien kombinatorisesta tulkinnasta. □

Voimme samalla tavalla todistaa Pascalin kaavan:

2.9. Lause. *Olkoon* $1 \leq k \leq n$. *Tällöin*
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Todistus. Jaetaan joukon $[n]$ k-osajoukot A kahteen ryhmään riippuen siitä onko $n \in A$. Jos $n \in A$, niin $A \cap [n-1]$ on $k-1$-joukko, joka voidaan valita $\binom{n-1}{k-1}$ tavalla. Jos $n \notin A$, niin $A \cap [n-1]$ on k-joukko, joka voidaan valita $\binom{n-1}{k}$ tavalla. Koska k-osajoukkoja on yhteensä $\binom{n}{k}$, väite seuraa summaperiaatteesta. □

Pascalin kaavaa käyttäen voimme piirtää ns. Pascalin kolmion. Alla näkyvässä kolmiomuodostelmassa kunkin rivin reunimmaiset luvut ovat ykkösiä ja muut luvut saadaan kahden viistosti yllä olevan luvun summana. Pascalin kaavata seuraa, että kolmion n:s rivi antaa binomikertoimet $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Pascalin kolmioon liittyy myös geometrinen tulkinta. Kuvitellaan, että laskeudumme kolmiota alaspäin kulkemalla numeroiden kautta niin, että jokaisen numeron kohdalla voimme valita jomman kumman viistosti alla olevista numeroista seuraavaksi välietapiksi. Tällöin kukin Pascalin kolmiossa esiintyvä luku ilmaisee kuinka monta reittiä ylimmältä ykköseltä kyseiselle paikalle vie. Tämä liittyy kulkuihin hilassa, joihin palaamme vielä.

Annetaan esimerkki vielä hieman monimutkaisemmasta yhtälöstä, jossa kombinatorisen tulkinnan löytäminen vaatii hieman enemmän kekseliäisyyttä:

2.10. Esimerkki. *Osoitetaan oikeaksi yhtälö*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(n-k) = n(n-1)2^{n-2}.$$

Tulkitaan molemmat puolet saman kombinatorisen laskutehtävän ratkaisuiksi. Olkoon X kaikkien kolmikkojen (x, y, A) joukko, missä $x, y \in [n]$, $A \subseteq [n]$ ja ehdot $x \in A$, $y \notin A$ ovat voimassa. Jos valitsemme ensin pisteet x, y voidaan tämä tehdä $n(n-1)$ tavalla siten, että $x \neq y$. Kun x, y on valittu voidaan ehdon täyttävä A valita 2^{n-2} tavalla tekemällä kullekin $z \in [n] \setminus \{x, y\}$ valinta onko $z \in A$ vai $z \notin A$.

Toisaalta, jos valitsemme ensin joukon A mahtavuudeksi k, joukon A voi valita $\binom{n}{k}$ tavalla. Tällöin x voidaan valita A:sta k tavalla ja y joukosta $[n] \setminus A$ $n-k$ tavalla. Summaamalla yli mahdollisten k:n arvojen saadaan yhtälön vasen puoli.

Binomikertoimien nimi tulee seuraavasta tuloksesta

2.11. Lause (Binomilause). *Olkoot a, b reaalilikuja ja $n \geq 0$. Tällöin*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Todistus. Kun n-kertainen tulo $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ kirjoitetaan auki saadaan 2^n termiä, missä kustakin tekijästä $a+b$ on valittu joko a tai b. Binomikertoimien kombinatorisen tulkinnan nojalla sellaisia valintoja, joissa on a on valittu k kertaa on $\binom{n}{k}$ kappaletta, eli termi $a^k b^{n-k}$ esiintyy auki kirjoitetussa tulossa $\binom{n}{k}$ kertaa. □

Yllä esitetyssä binomilauseen muotoilussa oletimme a:n ja b:n reaaliluvuiksi, mutta sama todistus toimii, kun ne ovat kompleksilukuja, polynomeja tai vaikka potenssisarjoja, joihin törmäämme myöhemmin. Algebraan tutustuneelle lukijalle huomautettakoon, että binomilause toimii mielivaltaisessa renkaassa, kunhan pätee $ab = ba$.

Sijoittamalla binomilauseeseen $a = b = 1$ saadaan uusi todistus Lauseelle 2.8. Tätä voidaan pitää algebrallisena todistuksena siinä missä alunperin esittämämme todistus oli kombinatorinen.

2.12. Lause. *Yhtälöllä $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ on $\binom{n+k-1}{k-1}$ ratkaisua, missä $x_i \in \mathbf{N}$ kaikilla $1 \leq i \leq k$.*

Todistus. Jokainen ratkaisu $(a_1, \ldots, a_k)$ voidaan esitää yksikäsitteisesti seuraavalla tavalla. Muodostetaan merkkijono pisteistä ja pystyviivoista seuraavasti:

$$\underbrace{\cdot\ \cdots\ \cdot}_{a_1 \text{ kpl}} | \underbrace{\cdot\ \cdots\ \cdot}_{a_2 \text{ kpl}} | \quad \cdots \quad | \underbrace{\cdot\ \cdots\ \cdot}_{a_k \text{ kpl}}$$

Ennen ensimmäistä viivaa esiintyy siis a_1 pistettä, ensimmäisen ja toisen viivan välissä on a_2 pistettä ja niin edelleen. Jonossa esiintyy $a_1 + \cdots + a_k = n$ pistettä ja $k-1$ pystyviivaa. Yhteensä jonossa on siis $n+k-1$ merkkiä, joista voimme valita $k-1$ pystyviivan paikat $\binom{n+k-1}{k-1}$ tavalla. $\square$

2.13. Esimerkki. *Kuinka monella tavalla neljän hengen kesken voidaan jakaa 8 (identtistä) euron kolikkoa?*

Olkoon x_i henkilölle $i \in [4]$ jaettava määrä kolikoita. Kysytään siis kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10.$$

Lauseen 2.12 nojalla näitä on

$$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286.$$

2.2. Multinomikeroimet. Binomikertoimen $\binom{n}{k}$ kombinatorinen tulkinta voidaan muotolla seuraavasti: lasketaan kuinka monella tavalla n alkion joukko voidaan jakaa kokoa k ja $n-k$ oleviin osajoukkoihin. Yleisemmin voidaan tarkastella seuraavaa ongelmaa. Oletetaan, että on annettu n-joukko S sekä luvut $k_1, \ldots, k_m$, missä $k_1 + \cdots + k_m = n$. Kuinka monella tavalla S voidaan jakaa erillisiin joukkoihin $S_1, \ldots, S_m$ siten, että $|S_i| = k_i$ kaikilla $1 \leq i \leq m$? Tässä siis osituksessa esiintyvien joukkojen järjestys otetaan huomioon, eli (A, B) on eri ositus kuin (B, A). Ratkaisun antavat multinomikertoimet, jotka määritellään seuraavasti: kun $k_1 + \cdots + k_m = n$ asetetaan

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

Binomikertoimet ovat erikoistapauksia multinomikertoimista, nimittäin kun $0 \leq k \leq n$ on

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}.$$

2.14. Lause. *Olkoot $k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}$ ja $n = k_1 + \cdots k_m$. Tällöin joukolla $[n]$ on*

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$$

järjestettyä ositusta $(S_1, \ldots, S_m)$, missä $|S_i| = k_i$ kullakin $i \leq m$.

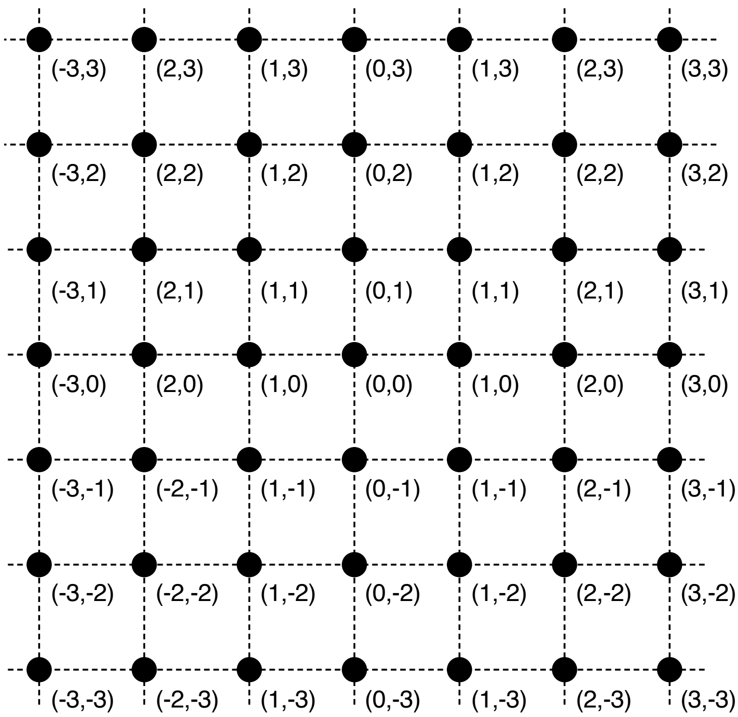
Todistus. Joukon $[n]$ jokaisesta $n!$ permutaatiosta $(a_1, \ldots, a_n)$ saadaan järestetty ositus ottamalla ensimmäiset k_1 alkiota joukkoon S_1, seuraavaat k_2 alkiota joukkoon S_2 ja niin edelleen. Kaksi permutaatiota tuottaa saman osituksen jos ja vain jos ne saadaan toisistaan permutoimalla kunkin joukon $S_1, \ldots, S_m$ alkoita keskenään. Tuloperiaatteen nojalla tällaisia permutaatioita on $k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!$ eli jokainen joukon $[n]$ permutaatio vastaa tätä määrää järjestettyjä osituksia. $\square$

Multinomikertoimet voidaan kirjoittaa binomikertoimien avulla seuraavasti:

(2.15)
$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}{k_m}$$

minkä voi todeta joko kijoittamalla yhtälön molemmat puolet auki kertomafunktioiden avulla tai kombinatorisella päättelyllä. Huomautettakoon, että yhtälön 2.15 oikealla puolella esiintyvät tekijät (eikä ainoastaan niiden järjestys) riippuvat lukujen $k_1, \dots, k_m$ järjestyksestä.

2.3. Hilakulkujen laskeminen. Kaksiulotteisella hilalla eli tasohilalla tarkoitetaan joukkoa $\mathbf{Z}^2$ (vastaavasti voidaan määritellä n-ulotteinen hila). Kullakin tasohilan pisteellä on siis kaksi koordinaattia, jotka ovat kokonaislukuja. Taso ja myös tasohila on tapana kuvata niin, että piste $(a+1, b)$ on pisteen (a, b) oikealla puolella ja $(a, b+1)$ yläpuolella.



Kuva 1. Hilan osajoukko, joka koostuu pisteistä (a, b), missä $|a|, |b| \leq 3$.

Kulku hilassa on jono $(x_1, \cdots, x_n)$ hilan pisteitä. Kulun $(x_1, \cdots, x_n)$ askelilla tarkoitetaan pisteitä $x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}$. Tässä erotukset ovat vektorilaskutoimituksia, eli $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$. Huomaa, että kulussa on pisteitä aina yksi enemmän kuin askelia.

2.16. Esimerkki. *Shakkilauta voidaan esittää hilan osajoukkona* $[8]\times[8]$. *Shakkinappuloiden siirrot ovat kulkuja* (x_1, x_2). *Ratsu-nappulan sallitut siirrot ovat kulkuja missä askel* $x_2 - x_1$ *on valittu joukosta*

$$\{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 : |a| = 2, |b| = 1\} \cup \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 : |a| = 1, |b| = 2\}.$$

Tosin sanoen yhden koordinaatin pitää muuttua yhdellä ja toisen koordinaatin kahdella.

2.17. Lemma. *Olkoon* $x \in \mathbf{Z}^2$ *ja olkoon* $S \subseteq \mathbf{Z}^2$. *Tällöin* n *askeleen kulkuja jotka alkavat* x*:stä ja jossa kaikki askeleet on valittu joukosta* S *on* $|S|^n$

Todistus. Kun alkupiste on annettu voimme valita askeleet joukosta S mielivaltaisesti, joten väite seuraa tuloperiaatteesta. $\square$

2.18. Lemma. *Olkoot* $a, b \geq 0$. *Tällöin pisteestä* $(0, 0)$ *pisteeseen* (a, b) *kulkevia kulkuja, missä askeleet ovat kaikki muotoa* $(1, 0)$ *tai* $(0, 1)$ *on* $\binom{a+b}{a}$ *kappaletta.*

Todistus. Kukin sallittu askel kasvattaa koordinaattien summaa yhdellä, joten pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen (a, b) tarvitaan aina $a + b$ askelta. Näistä a askeleen on oltava $(1, 0)$-tyyppisiä. Voimme valita $(1, 0)$ tyyppisten askelien paikat $\binom{a+b}{a}$ tavalla binomikertoimien kombinatorisen tulkinnan nojalla. $\square$

2.19. Esimerkki. *Kuinka monella tavalla päästään pisteestä* $(0, 0)$ *pisteeseen* (a, b) *käyttämällä askelia* $(1, 0)$ *ja* $(1, 0)$, *kun on kielletty kulkemasta pisteen* (c, d) *kautta?*

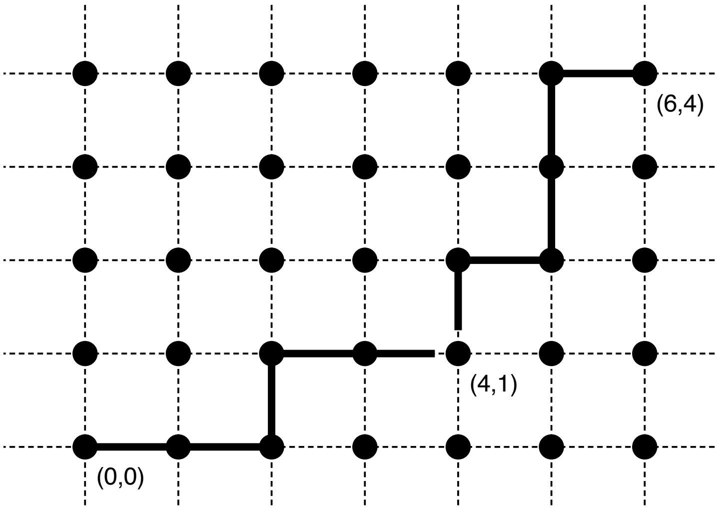
Kulkuja pisteestä $(0, 0)$ *pisteeseen* (a, b) *käyttäen annettuja askelia on lemman 2.18 mukaan yhteensä* $\frac{a+b}{a}$. *Lasketaan niiden kulkujen lukumäärä, jotka käyvät pisteessä* (c, d). *Pisteestä* $(0, 0)$ *pisteeseen* (c, d) *päästään* $\binom{c+d}{c}$ *reittiä, tästä edelleen pisteeseen* (a, b) *päästään* $\binom{(a-c)+(b-d)}{a-c}$ *reittiä. Käyttämällä tuloperiaatetta saadaan koko tehtävän ratkaisuksi siis*

$$\binom{a+b}{a} - \binom{c+d}{c}\binom{a+b-c-d}{a-c}.$$

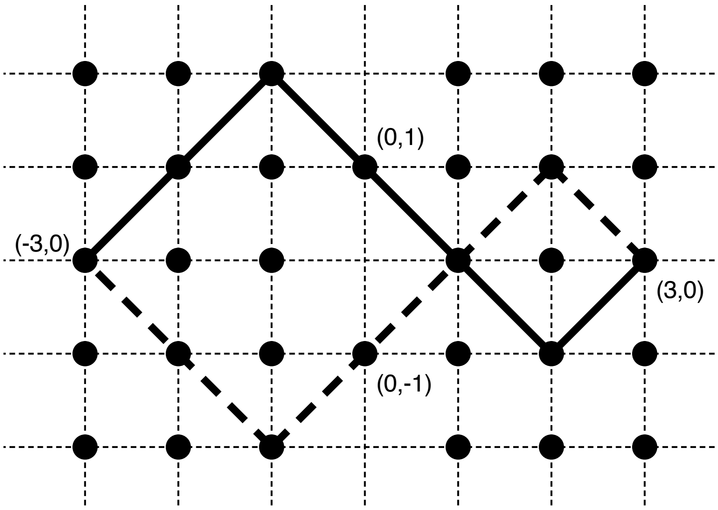
2.20. Esimerkki. *Kuinka monella tavalla päästään pisteestä* $(-3, 0)$ *pisteeseen* $(3, 0)$ *käyttäen askelia* $(1, 1)$ *ja* $(1, -1)$ *kun* y*-akseli* $\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x = 0\}$ *saadaan ylitää vain pisteistä* $(0, 1)$, $(0, -1)$*?*

Lasketaan kuinka monella tavalla päästään pisteestä $(-3, 0)$ *pisteeseen* $(0, 1)$. *Askelia tarvitaan selvästi kolme, sillä kukin sallittu askel kasvattaa ensimmäistä koordinaattia tasan yhdellä. Askelista kahden on oltava tyyppiä* $(1, 1)$ *ja yhden tyyppiä* $(1, -1)$. *Voimme valita vapaasti missä vaiheessa käytämme* $(1, -1)$*-askeleen, joten reittejä* $(-3, 0)$*:sta* $(0, 1)$*:n on kolme.*

Symmetrian takia nähdään, että myös reittejä pisteeseen $(0, -1)$ *on kolme. Edelleen pisteistä* $(0, 1)$ *ja* $(0, -1)$ *pisteeseen* $(3, 0)$ *on kolme reittiä kummastakin, eli ratkaisuksi saamme summa- ja tuloperiaatteiden nojalla* $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$.



Kuva 2. Esimerkin 2.19 tapaus, missä $a = 6$, $b = 4$, $c = 4$ ja $d = 1$. Jokainen pisteen $(4, 1)$ kautta kulkeva reitti saadaan valitsemalla reitti $(0, 0)$:sta $(4, 1)$:n ja edellisestä rippumaton reitti tästä $(6, 4)$:n.



Kuva 3. Esimerkin 2.20 hila, josta on postettu kielletyt pisteet. Ensin voidaan valita kuljetaanko pisteen $(0, 1)$ vai $(0, -1)$ kautta, sitten voidaan valita reitin osuudet ennen ja jälkeen y-akselin ylittämisen. Kuvassa kulku, ja sen peilikuva (katkoviiva). Peilaus x-akselin suhteen kuvaa reitit, jotka kulkevat $(0, 1)$:n kautta reiteiksi, jotka kulkevat $(0, -1)$:n kautta ja päinvastoin. Koska kyseessä on bijektio, kummankinlaisia reittejä on yhtä monta.

2.21. Esimerkki. *Kuinka monta n askeleen hilakulkua on pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(m,0)$ käyttäen askelia $(1,0)$, $(0,-1)$ ja $(0,1)$?*

Merkitään kyseistä lukua $f(n,m)$:llä. Selvästi jotta vaaditunlaisia kulkuja olisi olemassa ylipäätään on oltava $0 \le m \le n$. Tällöin $(1,0)$ tyyppisiä askelia on oltava tasan m kappaletta. Tyyppiä $(0,1)$ ja $(0,-1)$ olevia askelia on oltava yhtä paljon eli $\frac{n-m}{2}$ kumpaakin, mikä on mahdollista aina kun $n-m$ on parillinen. Muuten askelien järjestys voidaan valita vapaasti, joten ratkaisuksi saadaan

$$f(n,m) = \begin{cases} \binom{n}{m}\binom{n-m}{(n-m)/2} & \text{kun } 0 \le m \le n \text{ ja } n-m \text{ on parillinen} \\ 0 & \text{muutoin .} \end{cases}$$

2.4. Catalanin luvut.

2.4. Catalanin luvut. Ratkaistaan seuraavaksi yksi tärkeä erikoistapaus hilakulkuihin liittyen.

2.22. Lemma. *Niiden hilakulkujen lukumäärä, jotka kulkevat pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(2n,0)$ käyttäen askelia $(1,1)$ ja $(-1,1)$ on $\binom{2n}{n}$*

Todistus. Selvästi, jotta päästään pisteeseen $(2n,0)$ on $(1,1)$ ja $(-1,1)$ askelia oltava yhtä monta, eli n kumpaakin. Tyyppiä $(1,1)$ olevien askelien paikat voidaan tällöin valita $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ tavalla. □

Seuraavassa x-akselilla tarkoitetaan joukkoa $\{(x,0) : x \in \mathbf{Z}^2\}$ ja sanotaan, että (x,y) on x-akselin alapuolella, jos $y < 0$.

2.23. Lause. *Niiden hilakulkujen lukumäärä, jotka kulkevat pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(2n,0)$ käyttäen askelia $(1,1)$ ja $(1,-1)$ ja jotka eivät käy missään vaiheessa x-akselin alapuolella on $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$*

Todistus. Selvästi voimme yhtä hyvin laskea niiden kulkujen lukumäärän, jotka alkavat pisteestä $(0,1)$, loppuvat pisteeseen $(n,1)$ eivätkä käy x-akselilla (tai sen alapuolella). Olkoon X niiden kulkujen $(x_0, x_1, \ldots, x_{2n})$ joukko, joille $x_0 = (0,1)$, $x_{2n} = (2n,1)$ ja jotka käyttävät askelia askelia $(1,1)$ ja $(1,-1)$. Lemman 2.22 nojalla $|X| = \binom{2n}{n}$.

Olkoon $Y \subseteq X$ niiden kulkujen joukko, jotka käyvät x-akselilla. Jos $(x_0, \ldots, x_{2n}) \in Y$, olkoon $\varphi(x_0, \ldots, x_{2n}) = (y_0, \ldots, y_{2n})$, joka saadaan peilaamalla kaikki pisteet $x_0, x_1, \ldots$ x-akselin suhteen ennen kuin x_k käy x-akselilla ensi kerran. Toisin sanoen, jos k on pienin indeksi, jolla x_k käy x-akselilla, niin y_i on x_i:n peilikuva, kun $i < k$ ja $y_i = x_i$, kun $i \ge k$.

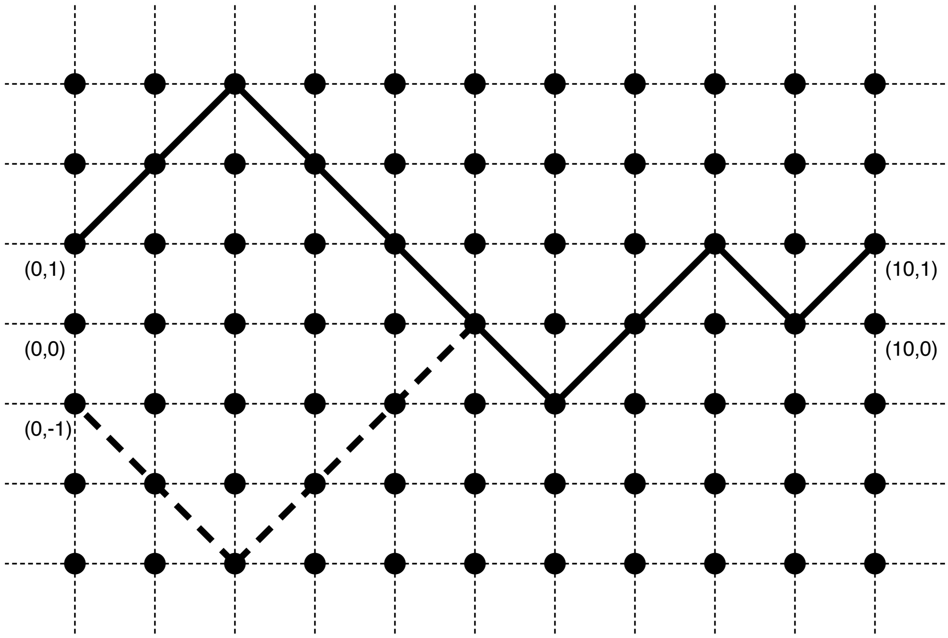
Olkoon nyt Z niiden kulkujen joukko, jotka alkavat pisteestä $(0,-1)$ ja päättyvät pisteeseen $(2n,1)$ käyttäen askelia $(1,1)$ ja $(1,-1)$. Jokainen Z:n kulku käy x-akselilla vähintään kerran, joten edellä määritelty φ on bijektio $Y \to Z$ (katso kuva). Jokaisessa Z:n kulussa on $(1,1)$-askelia kaksi enemmän kuin $(1,-1)$-askelia, joten

$$|Y| = |Z| = \binom{2n}{n-1}.$$

Laskettavien hilakulkujen joukko on $X \setminus Y$, jonka mahtavuudeksi saadaan

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},$$

mikä voidaan voidaan sieventää annettuun muotoon $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. □



KUVA 4. Lauseen 2.23 bijektio: yhtenäisellä viivalla piirretty joukon Y kulku y kuvautuu joukon Z kuluksi z, jonka alkuosa on merkitty katkoviivalla. Koska vain kulun alkuosa peilataan, kulkujen loppuosat yhtyvät.

Lauseessa 2.23 esintyvää lukua $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ kutsutaan n:neksi Catalanin luvuksi. Varoituksena mainittakoon että kirjallisuudessa Catalanin lukujen indeksöinti vaihtelee. Joissakin lähteissä määrittelemäämme lukua C_n merkitäänkin C_{n+1}. Catalanin luvut ovat tärkeitä, sillä niille löytyy lukuisia kombinatorisia tulkintoja. Esimerkiksi, jos uhkapelissä voi voittaa tai hävitä joka kierroksella samansuuruisen panoksen, C_n kertoo kuinka monella tavalla peliä voi pelata $2n$ kierrosta ja jäädä omilleen siten, että missään vaiheessa ei ole ollut tappiolla.

2.24. LEMMA. *Niiden hilakulkujen lukumäärä, jotka kulkevat pisteestä* $(0,0)$ *pisteeseen* $(2n,0)$ *käyttäen askelia* $(1,1)$ *ja* $(-1,1)$*, eivät käy missään vaiheessa* x*-akselin alapuolella ja käyvät* x*-akselilla vain päätepisteissä on* C_{n-1}

Huomautettakoon, että määritelmän nojalla $C_0 = 1$.

TODISTUS. Jos kulku $(x_0, \ldots, x_{2n})$ täyttää mainitut ehdot, on ensimmäisen askeleen oltava $(1,1)$ ja viimeisen $(1,-1)$. Tällöin $2n-2$ askeleen kulku $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})$

täyttää ehdot $x_1 = (1,1)$ ja $(x_{2n-1}) = (2n-1,1)$ eikä se käy x-akselilla. Välissä oleva kulku voidaan siis valita C_{n-1} tavalla. □

2.25. LEMMA. *Kun $n \geq 1$ pätee*

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}.$$

TODISTUS. Käytetään hyväksi lauseen 2.23 antamaa tulkintaa Catalanin luvuille sekä lemmaa 2.24 . Jokainen kulku pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(2n,0)$ askelin $(1,1)$ ja $(1,-1)$ palaa x-akselille ensikerran $2k$ askeleen jälkeen jollakin $1 \leq k \leq n$. Kullakin k tällaisten kulkujen ensimmäiset $2k$ askelta voi valita lemman 2.24 nojalla C_{k-1} tavalla ja viimeiset $2n-2k$ askelta lauseen 2.23 nojalla C_{n-k} tavalla, joten summan ja tulon periaatteiden nojalla

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}.$$

□

Tyydymme päättämään pikaisen tutustumisen Catalanin lukuihin seuravaan esimerkkiin. Konveksi n-kulmio on n-kulmio, jonka kaikki n sisäkulmat ovat alle 180°. Konveksin n-kulmion lävistäjällä tarkoitetaan janaa, joka yhdistää kahta kulmaa, joita ei yhdistä kulmion sivu. Konveksin n-kulmion lävistäjä jakaa sen aina koveksiin a- ja b-kulmioon, missä $a+b=n+2$.

2.26. ESIMERKKI. *Olkoon S konveksi n-kulmio. Kuinka monella tavalla S voidaan jakaa kolmioiksi piirtämällä toisiaan leikkaamattomia lävistäjiä?*

Olkoon K_n kyseinen luku kullekin $n \geq 3$. Triviaalisti $K_3 = 1$. Olkoon nyt $n \geq 4$ ja S annettu n-kulmio. Numeroidaan S:n kulmapisteeet myötäpäivään numeroilla $0,1,2,\ldots,n-1$.

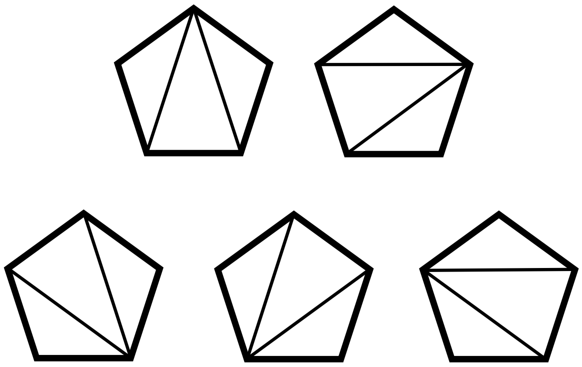
Kun S jaetaan kolmioihin piirtämällä toisiaan leikkaamattomia lävistäjiä, janasta 0-1 *tulee jonkin kolmion* 0-1-k *sivu, missä $k \in \{2,3,\ldots,n-1\}$. Kun k on valittu voidaan kulmapisteiden $0,1,\ldots,k$ muodostama $k+1$-kulmio jakaa kolmioihin K_{k+1} tavalla ja kulmapisteiden $k,k+1,\ldots,n-1$ muodostama $n-k$-kulmio jakaa kolmioihin K_{n-k} tavalla.*

On siis osoitettu, että kullakin k:n valinnalla sellaisia S:n sallittuja kolmioihin jakoja, joissa esiintyy kolmio 0-1-k *on $K_{k+1}K_{n-k}$. Käymällä läpi eri vaihtoehdot k:lle saadaan rekursiivinen kaava:*

$$K_n = \sum_{k=2}^{n-1} K_{k+1}K_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-2} K_{k+2}K_{n-k-1}.$$

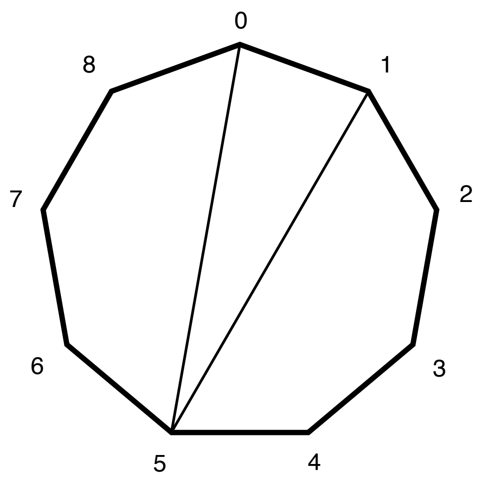
Jos nyt merkitään $H_n = K_{n+2}$, niin tästä saadaan

$$H_n = K_{n+2} = \sum_{k=1}^{n} K_{k+2}K_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} H_k H_{n-k-1},$$



Kuva 5. Esimerkin 2.26 tapaus $n = 5$. Viisikulmion voi jakaa kolmioiksi piirtämällä toisiaan lekkamattomia lävistäjiä kuvan osoittamilla $C_3 = 5$ tavalla.

joten luvut H_n toteuttavat lemmassa esiintyvän 2.25 rekursiokaavan sekä alkuarvon $K_3 = C_1$. Induktioperiaatteen nojalla $K_n = H_{n-2} = C_{n-2}$ kaikilla $k \geq 3$.



Kuva 6. Esimerkin 2.26 rekursio. Kun $n = 9$, niin jokainen sallittu kolmioihin jako, jossa esiintyy kolmio 0-1-5 saadaan jakamalla edelleen pisteiden 1-2-3-4-5 sekä 5-6-7-8-0 muodostamat monikulmiot kolmioihin.

3. Summa- ja erotusperiaate

Yhdistejoukon mahtavuus, epäjärjestelyongelma, surjektioiden lukumäärä

3.1. Yhdistejoukon mahtavuuden laskeminen. Tähän asti olemme ratkoneet kombinatorisia ongelmia, joissa ratkaisu on löytynyt pääasiassa soveltamalla sopivalla tavalla summaperiaatetta ja tuloperiaatetta. Esimerkkinä monimutkaisemmasta ongelmasta olkoon johdannossa esiintynyt kysymys lahjojen jakamisesta vieraille niin, että kukin saa jonkin toisen vieraan tuoman lahjan. Matemaattisesti kyse on seuraavasta ongelmasta:

3.1. Ongelma. *Kuinka monella n-joukon X permutaatiolla π ei ole yhtään kiintopistettä eli pistettä $x \in X$, jolle $\pi(x) = x$?*

Merkitään S_X:llä joukon X permutaatioiden joukkoa, missä permutaatiot ymmärretään nyt bijektioiksi joukolta itselleen. Jos $x \in X$ niin olkoon G_x on niiden permutaatioiden $\pi : X \to X$ joukko, joille $\pi(x) = x$. Jokainen joukon G_x permutaatio määräytyy yksikäsittisesti, kun määrätään $\pi(y)$ kaikille $y \neq x$ mikä vastaa permutaation $X \setminus \{x\} \to X \setminus \{x\}$ määräämistä. Täten $|G_x| = (n-1)!$. Ongelmassa 3.1 kysytään joukon

$$S_X \setminus \bigcup_{x \in X} G_x$$

mahtavuutta. Koska tiedetään että $|S_X| = n!$, tämä ongelma ratkeaa, jos osataan määrittää joukkojen G_x yhdisteen mahtavuus. Joukot G_x eivät kuitenkaan ole erillisiä (paitsi jos $|X| \leq 1$), sillä esimerkiksi identtinen kuvaus $x \mapsto x$ kuuluu jokaiseen joukkon G_x. Summaperiaatteen yksinkertainen soveltaminen ei siis riitä. Seuraavaksi käydään läpi tärkeä työkalu, jota kutsutaan summa- ja erotusperiaatteeksi ja jonka avulla ongelma 3.1 saadan ratkaistua.

Summaperiaatteen mukaan kahden erillisen joukon A, B yhdisteen mahtavuus saadaan kaavasta $|A \cup B| = |A| + |B|$. Jos joukkoja A, B ei oleteta erillisiksi, saadaan seuraava yleinen tulos.

3.2. Lemma. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Todistus. Joukot $A \cap B, A \setminus B$ ja $B \setminus A$ ovat erillisiä, joten summaperiaatteen nojalla

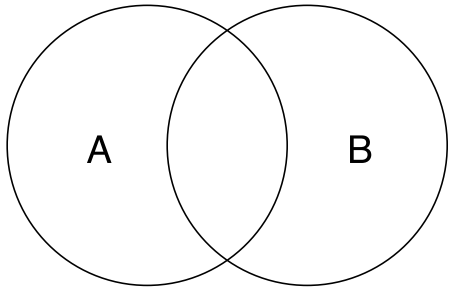
$$|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Toisaalta

$$|A \cup B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |B \setminus A|$$

ja yhdistämällä nämä kaksi kaavaa saadaan väite osoitettua todeksi. □

Tässä kappaleessa esiteltävä summa- ja erotusperiaate on lemman 3.2 yleistys tapaukseen, jossa otetaan useamman joukon yhdiste. Kun joukot $A_1, \ldots, A_n$ on annettu, yhdisteen mahtavuus voidaan laskea summa- ja erotusperiaatteen avulla,



Kuva 7. Lemman 3.2 tilanne: sekä A että B voidaan hajottaa kahteen erilliseen osajoukkoo, joista toinen on $A \cap B$.

kunhan osataan laskea jokaista epätyhjää indeksijoukkoa $I \subseteq [n]$ vastaavan leikkauksen mahtavuus $|\bigcap_{k \in I} A_k|$.

3.3. Lause.
$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Todistus. Osoitetaan väite todeksi induktiolla luvun n suhteen. Tapaus $n = 1$ on selvä ja tapaus $n = 2$ vastaa täsmälleen lemman 3.2 sisältöä. Oletetaan siis, että $n \geq 3$ ja että väite on todistettu pienemmille n:n arvoille.

Käyttämällä tapausta $n = 2$ saadaan
$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| \tag{3.4}$$

Induktio-oletuksen nojalla
$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}| = \sum_{I \subseteq [n-1], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|. \tag{3.5}$$

Toisaalta induktio-oletusta voidaan käyttää myös viimeiseen termiin
$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| &= |(A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| \\ &= \sum_{I \subseteq [n-1], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} | \bigcap_{i \in I \cup \{n\}} A_i| \end{aligned}$$

Kaikenkaikkiaan voidaan siis kirjoittaa
$$|A_n| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| = \sum_{I \subseteq [n], n \in I} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|. \tag{3.6}$$

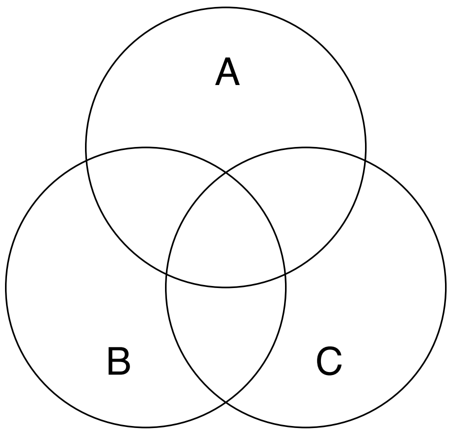
Väite seuraa, kun yhdistetään yhtälöt (3.4), (3.5) (3.6). $\square$

3.7. Esimerkki. *Kun on annettu kolme joukkoa A, B, C saadaan yhdisteen mahtavuudelle lauseen 3.3 nojalla yhtälö*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Tämä voidaan tulkita seuraavasti: arvioidaan ensin mahtavuutta laskemalla $|A| + |B| + |C|$. Tässä on kuitenkin laskettu kahteen kertaan ne alkiot, jotka esiintyvät vähintään kahdessa joukossa ja kolmeen kertaan ne alkiot, jotka esiintyvät kaikissa kolmessa joukossa. Vähennetään nyt edellisestä arviosta $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$.

Nyt ne pisteet, jotka esiintyvät kahdessa joukossa on laskettu ensin kahteen kertaan, sitten vähennetty kerran. Ne pisteet, jotka esiintyvät kaikissa kolmessa joukossa on kuitenkin laskettu kolmeen kertaan, sitten vähennetty kolmeen kertaan, joten viimeiseksi korjaukseksi lisäämme vielä arvioon $|A \cap B \cap C|$.



Kuva 8. Kolmen joukon A, B, C Venn-diagrammi jakaa yhdistejoukon $A \cup B \cup C$ yleisessä tapauksessa $2^3 - 1 = 7$ osaan. Näistä osista kolme koostuu alkioista, jotka kuuluvat tasan yhteen joukoista. Toiset kolme osaa vastaavat alkioita jotka kuuluvat tasan kahteen joukkoon ja viimeisenä on vielä kaikkiin kolmeen joukkoon kuuluvia pisteitä edistava alue.

Kun joukot $A_1, \ldots, A_n$ ovat annetun perusjoukon A osajoukkoja voidaan summa- ja erotusperiaate kirjoittaa hieman elegantimman näköisesti, nimittäin:

3.8. Seurauslause. *Olkoot $A_1, \ldots, A_n$ ovat annetun äärellisen perusjoukon A osajoukkoija. Tällöin*

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i| \tag{3.9}$$

missä tulkitaan $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = A$.

Huomautettakoon, että yllä esiintyvälle tyhjälle leikkaukselle ei yleensä ole mitään tilanteesta riippumatonta tulkintaa - samoin kuin ei komplementillekaan. Seurauslauseen 3.8 voi tulkita seuraavasti: kukin joukko A_k vastaa jotakin kiellettyä ominaisuutta ja summa- ja erotusperiaatteen avulla voidaan laskea kuinka monenlla perusjoukon alkiolla ei ole mitään kielletyistä ominaisuuksista.

Ennen esimerkkeihin ja sovelluksiin siirtymistä käydään vielä läpi toinen kenties intuitiivisempi tapa todistaa lause 3.8.

Summa- ja erotusperiaatteen toinen todistus. Oletetaan, että joukot $A_1, \dots, A_n$ ovat perusjoukon A osajoukkoja. Kutakin alkioita $a \in A$ kohti voidaan kysyä millä indeksieillä i pätee $a \in A_i$, ja millä indekseillä $a \notin A_i$. Jaotellaan alkiot $a \in A$ näiden kysymysten avulla seuraavasti.

Kullekin indeksijoukolle $I \subseteq [n]$ määritellään joukko $B_I \subseteq A$ asettamalla

$$B_I = \{a \in A : a \in A_i \text{ kun } i \in I\} \cap \{a \in A : a \notin A_i \text{ kun } i \notin I\}.$$

Joukot B_I muodostavat joukon $\mathcal{P}([n])$ osituksen. Toisin sanoen jokainen $a \in A$ kuuluu täsmälleen yhteen joukoista B_I. Lisäksi

$$B_\emptyset = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C.$$

Summa- ja erotusperiaatteessa esiintyvät leikkausjoukot voidaan nyt ilmaista seuraavalla tavalla. Kaikille $I \subseteq [n]$ pätee

$$|\bigcap_{k \in I} A_k| = \sum_{I \subseteq J \subseteq [n]} |B_J|.$$

Täten voidaan kirjoittaa

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{k \in I} A_k| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \sum_{I \subseteq J \subseteq [n]} |B_J| = \sum_{J \subseteq [n]} \sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} |B_J|. \tag{3.10}$$

Kun $|J| = m \geq 1$ voidaan käyttää binomilausetta:

$$\sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} |B_J| = |B_J| \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k = |B_J| (1-1)^m = 0.$$

Kun $J = \emptyset$ saadaan

$$\sum_{I \subset J} (-1)^{|I|} |B_J| = |B_\emptyset|.$$

Nyt olemme laskeneet yhtälön (3.10) oikean puolen, joten on osoitettu että

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{k \in I} A_k| = |B_\emptyset| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C|.$$

□

Summa- ja erotusperiaatteen todistukset ovat melko abstrakteja, mutta konkreettisissa esimerkeissä lauseen soveltaminen on suoraviivaista. Seuraavassa esimerkissä kielletyt ominaisuudet koskevat luvun jaollisuutta annetulla luvulla.

3.11. ESIMERKKI. *Kuinka moni luku välillä* $1-1000$ *ei ole jaollinen millään luvuista* $3, 5, 7$*?*

Merkitään $A_k = \{m \in [1000] : k \text{ on jaollinen } m\text{:llä}\}$, *kun* $k \geq 1$. *Joukkojen* A_k *mahtavuus on helppo laskea, nimittäin* $|A_k| = \lfloor 1000/k \rfloor$, *missä merkintä* $\lfloor \cdot \rfloor$ *tarkoittaa pyöristämistä alas lähimpään kokonaislukuun.*

Luvuilla $3, 5, 7$ *ei ole keskenään yhteisiä tekijöitä, joten lukuteorian perusteiden nojalla* $A_3 \cap A_5 = A_{15}$, $A_5 \cap A_7 = A_{35}$, $A_7 \cap A_3 = A_{21}$ *ja* $A_3 \cap A_5 \cap A_7 = A_{105}$, *joten Seurauslauseen 3.8 nojalla vastaukseksi saadaan*

$$1000 - |A_3| - |A_5| - |A_7| + |A_{15}| + |A_{35}| + |A_{21}| - |A_{105}|$$

$$= 1000 - 333 - 200 - 142 + 66 + 28 + 47 - 9 = 457.$$

3.2. Epäjärjestelyt ja surjektiot. Yleisessä muodossaan summa- ja erotusperiaatetta voi olla työlästä soveltaa, sillä kun n joukon yhdisteen mahtavuutta lasketaan tulee laskettavaksi $2^n - 1$ leikkausjoukon mahtavuudet ja näiden summa. Tässä kappaleessa käsitellään kahta teoreettisesti mielenkiintoista erikoistapausta, joissa symmetrian takia leikkausjoukkojen mahtavuudet on helppo määrittää. Ensimmäisenä tartumme ongelmaan 3.1.

3.12. LEMMA. *Olkoon* $I \subseteq [n]$ k*-joukko. Olkoon* G_I *niiden permutaatioiden* $\pi : [n] \to [n]$ *joukko, joille* $\pi(i) = i$ *kaikilla* $i \in I$. *Tällöin* $|G_I| = (n-k)!$

TODISTUS. Kunkin $\pi \in G_I$ määrää yksikäsitteisesti sen rajoittuma $\pi' : [n] \setminus I \to [n] \setminus I$. Jälkimmäinen on $n-k$-joukon permutaatio, joka voidaan valita $(n-k)!$ tavalla. □

Seuraavassa todistuksessa käytetään hyväksi potenssijoukon hajotelmaa

$$\mathcal{P}([n]) = [n]^{(0)} \cup [n]^{(1)} \cup \cdots \cup [n]^{(n)},$$

erillisiksi joukoiksi, eli havaintoa, että kukin $I \subseteq [n]$ on k-joukko täsmälleen yhdellä k:n arvolla $0 \leq k \leq n$.

3.13. LAUSE. *Joukon* $[n]$ *kiintopisteettöimen permutaatioiden lukumäärä on*

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

TODISTUS. Otetaan kullakin $i \in [n]$ käyttöön merkintä G_i niiden permutaatioiden $\pi : [n] \to [n]$ joukolle, jotka toteuttavat ehdon $\pi(i) = i$. Yleisemmin, kaikilla $I \subseteq [n]$ merkitään $G_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \textit{ kaikilla } i \in I\}$. Kiintopisteettömiä permutaatioita ovat täsmälleen ne, jotka eivät kuulu mihinkään joukkoon G_i missä $i \in [n]$, joten niiden lukumäärä on seurauslauseen 3.8 nojalla

$$|(G_1 \cup \cdots \cup G_n)^C| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} G_i|.$$

Kussakin yllä olevan yhtälön oikealla puolella esiintyvässä leikkauksessa esiintyy k joukkoa jollakin $0 \leq k \leq n$. Kun yhteenlaskettavat ryhmitellään luvun k avulla saadaan:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{I \in [n]^{(k)}} (-1)^k |\bigcap_{i \in I} G_i| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{I \in [n]^{(k)}} (-1)^k |G_I|.$$

Tiedämme, että k-osajoukkoja on $\binom{n}{k}$ ja kullekin $I \in [n]^{(k)}$ on lemman 3.12 nojalla $|G_I| = (n-k)!$, joten kiintopisteettömien permutaatioiden lukumääräksi saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

Huomautuksena, matemaattisen analyysin kurseilla osoitetaan, että

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

sijoittamalla -1 eksponenttifunktion e^x sarjakehitelmään. Kyseinen sarja suppenee erittäin nopeasti ja tähän perustuen ei ole vaikea osoittaa, että kiintopisteettömien permutaatioiden lukumäärä saadaan kaavasta $\lfloor n!/e \rfloor$. Kiintopisteettömien permutaatioiden osuus kaikista permutaatioista suppenee siis kohti lukua $e^{-1} \approx 0.368$, kun $n \to \infty$.

Aiemmin olemme osoittaneet, että m-joukolta n-joukolle on $(n)_m$ injektiota. Käsitellään nyt vastaava kysymys surjektioille:

3.14. Lause. *Olkoot $1 \leq n \leq m$. Tällöin m-joukolta n-joukolle on*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

surjektiota.

Todistus. Lasketaan kuinka moni kaikista n^m kuvauksesta $[m] \to [n]$ on surjektiota. Määritellään A_i kullekin $i \in [n]$ niiden kuvausten $[m] \to [n]$ joukoksi, jotka eivät saa arvia i missään pisteessä $j \in A_i$. Kuvaus $[m] \to [n]$ on surjektio täsmälleen silloin, kun se ei kuulu mihinkään joukoista A_i, $i \in [n]$. Lauseen 3.8 nojalla surjektioita on siis

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Kun $I \subseteq [n]$ leikkaus $|\bigcap_{i \in I} A_i|$ koostuu kaikista funktioista $[m] \to [n] \setminus I$. Näidel lukumäärä on $(n - |I|)^m$. Jos siis indeksijoukossa on k indeksiä, vastaavan leikkauksen koko on siis $(n-k)^m$. Toisaalta k:n kokoisten indeksijoukkojen lukumäärä saadaan binomikeroimista, joten surjektioiden lukumäärä on

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m.$$

□

3.15. SEURAUSLAUSE. *Olkoon* $n \geq 1$. *Tällöin*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n = n!$$

TODISTUS. Jokainen surjektio n-joukolta n-joukolle on bijektio, eli erityisesti surjektioita ja bijektioita on yhtä monta. Lauseen 3.14 mukaan surjektioiden lukumäärän antaa väitetyn yhtälön vasen puoli ja lauseen 2.1 mukaan bijektioiden lukumäärän antaa yhtälön oikea puoli. □

3.16. ESIMERKKI. *Kuinka monella tavalla* 5 *työntekijälle voidaan jakaa* 10 *työtehtävää niin, että jokainen saa vähintään yhden työtehtävän?*

Ehto että jokainen työntekijä saa vähintään yhden tehtävän tarkoittaa, että haetaan surjektiota työtehtävien joukolta työntekijöiden joukolle. Lauseen 3.14 nojalla tämä voidaan tehdä

$$\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{5}{k}(n-k)^{10}$$

$$=\binom{5}{0}5^{10}-\binom{5}{1}4^{10}+\binom{5}{2}3^{10}-\binom{5}{3}2^{10}+\binom{5}{4}$$

$$= 9765625 - 5\cdot 1048576 + 10\cdot 59049 - 5\cdot 1024 = 5108115$$

tavalla.

Ratkaistaan vielä yksi monimutkaisempi klassinen ongelma summa- ja erotusperiaatteen avulla.

3.17. ONGELMA. *Juhliin saapuun n pariskuntaa. Kuinka monella tavalla vieraat voidaan istuttaa pyöreän pöydän ympärille* $2n$ *istumapaikalle siten, että miesten ja naisten paikat vuorottelevat ja lisäksi mikään pariskunta ei istu vierekkäin.*

Jos luovuttaisiin vaatimuksesta ettei pariskunta saa istua vierekkäin voitaisiin ratkaista ongelma seuraavasti. Kun numeroidaan istumapaikat myötäpäivään numeroilla 1-$2n$ niin selvästi joko miehet istuvat kaikki parittomilla paikoilla ja naiset parillisilla tai toisinpäin. Kun tämä valinta on tehty miehet voidaan asettaa paikoilleen $n!$ tavalla ja naiset samoin $n!$ tavalla, joten ratkaisuksi saataisiin $2(n!)^2$.

Ratkaistaan nyt koko ongelma siinä tapauksessa että miehet on asetettu parittomille paikoille ja naiset parittomille. Merkitään pariskuntia $P_1, \ldots, P_n$ missä pariskunta P_i koostuu miehestä $♂_i$ ja naisesta $♀_i$. Merkitään lisäksi kaikkien miesten ja naisten joukkoa kirjaimilla M ja N.

Olkoon nyt S sellaisten joukon $M \cup N$ permutaatioiden $(a_1, \cdots, a_{2n})$ joukko, missä miehet esiintyvät parittomilla paikoilla ja naiset parillisilla paikoilla. Edellä esiintyneen päättelyn nojalla $|S| = n!^2$. Kutsutaan tehtävän hengessä joukon S alkioita istumajärjestyksiksi. Jos $s = (a_1, \cdots, a_{2n}) \in S$ niin sanotaan, että pariskunta i istuu istumajärjestyksessä s vierekkäin, jos jollekin indeksille j pätee $\{a_j, a_{j+1}\} = P_i$ tai $\{a_{2n}, a_1\} = P_i$. Määritellään nyt nyt kaikilla $i \in [n]$ joukko

$$S_i = \{s \in S : \text{ pariskunta } i \text{ istuu vierekkäin istumajärjestelyssä } s\}.$$

Vastaavasti, kun $I \subseteq [n]$ määritellään S_I niiden istumajärjestysten joukoksi, joissa jokainen pariskunta P_i, $i \in I$ istuu vierekkäin. Tosin sanoen $S_I = \bigcap_{i \in I} S_i$. Tehtävänä on laskea sellaisten istumajärjestysten s lukumäärä, joilla $s \notin S_i$ kaikilla $i \in [n]$. Jotta summa- ja erotusperiaatetta päästäisiin soveltamaan on siis kyettävä laskemaan joukkojen S_I mahtavuus, kun $I \subseteq [n]$. Tähän tähtää seuraava lemma:

3.18. Lemma. *Olkoon pyöreässä pöydässä m istumapaikkaa ja olkoon $2 \leq 2k \leq m$. Tällöin voidaan valita joukko erillisiä istumapaikkapareja $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$, missä kukin T_i koostuu kahdesta vierekkäisestä paikasta $\frac{m}{k}\binom{m-k-1}{k-1}$ tavalla.*

Todistus. Olkoon X kaikkien kysyttyjen parijoukkojen joukko, eli on osoitettava, että

$$|X| = \frac{m}{k}\binom{m-k-1}{k-1}.$$

Lasketaan kuinka monella tavalla $f(m,k)$ voidaan valita pari (A, a) missä $A \in X$ on k-joukko erillisiä vierekkäisten paikkojen pareja ja $a \in A$. Kutsutaan a:ta kunnia-aitioksi. Valitsemalla ensin paikat A ja sitten kunnia-aition $a \in A$ nähdään tuloperiaatteesta, että

$$f(m,k) = |X| \cdot k.$$

Lasketaan nyt $f(m,k)$ toisella tavalla. Valitaan ensin kaksi vierekkäistä paikkaa ja kutsutaan niitä vastaavaa paria kunnia-aitioksi (m vaihtoehtoa). Seuraavaksi numeroidaan paikat myötäpäivään $1, \ldots, m$ niin että kunnia-aitioksi tulee $\{m-1, m\}$. Loput paikat jaetaan seuraavasti. Kirjoitetaan $k-1$ kortille "istu" ja $m-2k$ kortille "siirry" ja sekoitetaan kortit. Aloitetaan nyt kunnia-aition viereiseltä paikalta 1 ja nostetaan yksi kortti kerrallaan palauttamatta kortteja pakkaan. Jos ollaan paikalla j ja kortissa lukee "istu" otetaan pari $\{j, j+1\}$ mukaan ja siirrytään paikalle $j+2$. Jos ollaan paikalla j ja kortissa lukee "siirry", siirytään paikalle $j+1$. Jokaista "istu"-korttia kohti siirrytään 2 paikkaa ja jokaista "siirry"-korttia kohti siirrytään 1 paikka. Kun kaikki $m-k-1$ korttia on nostettu päädytään siis paikalle

$$1 + 2(k-1) + (m-2k) = m-1$$

ja lopetetaan.

On helppo vakkuuttua siitä, että jokainen tapa valita loput $k-1$ paria, kun kunnia-aitio on jo valittu vastaa yhtä tapaa valita "istu"-korttien paikat pakassa.

Koska kortteja on yhteensä $m-k-1$ voidaan tämä siis tehdä

$$\binom{m-k-1}{k-1}$$

tavalla. Kun valitaan sekä kunnia-aitio että muut $k-1$ paria saadaan vaihtoehtojen lukumääräksi siis

$$f(m,k) = m\binom{m-k-1}{k-1}$$

Laskimme luvun $f(m,k)$ kahdella tavalla, joten vastausten on oltava samoja. Väite seuraa, kun ratkaistaan $|X|$ yhtälöstä

$$|X| \cdot k = m\binom{m-k-1}{k-1}.$$

□

Kun edellä esitetty päättely on tehty, päästään määrittämään summa- ja erotusperiaatteen soveltamiseen tarvittavaa lukua $|S_I|$, kun $I \subseteq [I]$. Olkoon $k = |I| \geq 1$. Kun pariskunnat P_i, $i \in I$ istutetaan vierekkäin saa kukin pariskunta yhden parillisen ja yhden parittoman paikan, joten erillistä päätöstä siitä kumpi istuu kummalle paikalle ei tarvitse tehdä; mies istuu parittomalle paikalle, nainen parilliselle. Kun valitaan istumajärjestys, jossa kukin pari P_i istuu vierekkäin voidaan siis $k \geq 1$ paria istumapaikkoja valita lemman 3.18 mukaan

$$\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}$$

tavalla. Nämä voidaan jakaa k pariskunnalle $k!$ tavalla. Jäljelle jää $n-k$ parillista paikkaa, jotka jaetaan $n-k$ jäljelläolevalle naiselle ja loput $n-k$ paikkaa $n-k$ jäljellä olevalle miehelle. Siis

$$|S_I| = \frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}k!(n-k)!(n-k)!.$$

Kun tämä kerrotaan k-joukkojen $I \subseteq [n]$ lukumäärällä $\binom{n}{k}$ saadaan

$$\binom{n}{k}\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}k!(n-k)!(n-k)! = n!\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Kun viimeiseen lausekkeeseen sijoitetaan $k=0$ saadaan $(n!)^2 = |S|$, joten lauseke on käyttökelpoinen myös tässä tapauksessa. Nyt summa- ja erotusperiaatteen nojalla ongelmassa 3.17 kysyttyjä istumajärjestyksiä joissa miehet istuvat paritomilla ja naiset parillisilla paikoilla on

$$|(S_1 \cup \cdots \cup S_n)^C| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|}|S_I| = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

Järjestyksiä, joissa naiset istuvat parittomilla paikoilla ja miehet parillisilla on yhtä monta, joten alkuperäisen ongelman vastaukseksi saadaan

$$2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

4. Permutaatiot ja torniongelmat

Luonnolliset luvut, äärelliset joukot ja niiden väliset kuvaukset, summan ja tulon säännöt, rekursiivisesti määritellyt funktiot

4.1. Laudat ja niiden torniluvut. Tässä luvussa sovellamme edellisissä luvuissa esiteltyä teoriaa ja tutkimme tarkemmin ongelmia, jotka voidaan esittää shakkipelin tornien sijoitteluongelmina.

Äärellisten joukkojen X, Y tulojoukkoa $X \times Y$ on tapana kuvata ruudukkona, jossa joukon X alkiot vastaavat pystyrivejä ja joukon Y alkiot vastaavat vaakarivejä. Alkiota (x, y) kuvaava ruutu löytyy siis x- ja y-rivien risteyksestä. Jos $f : X \to Y$ on kuvaus, niin sen kuvaajalla tarkoitetaan joukkoa

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}.$$

Jos $S \subseteq X \times Y$, niin $S = G(f)$ jollekin kuvaukselle f jos ja vain jos kaikille $x \in X$ on olemassa täsmälleen yksi y siten, että $(x, y) \in S$. Kuvausten tutuimmat ominaisuudet on tulkittavissa helposti kuvaajien avulla.

4.1. Lemma. *Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus tällöin f on*

i) *injektio, jos ja vain jos jokainen joukon $X \times Y$ pystyrivi sisältää tasan yhden pisteen joukosta $G(f)$.*
ii) *surjektio, jos ja vain jos jokainen joukon $X \times Y$ vaakarivi sisältää vähintään yhden pisteen joukosta $G(f)$.*
iii) *bijektio, jos ja vain jos jokainen joukon $X \times Y$ vaakarivi sisältää täsmälleen yhden pisteen.*

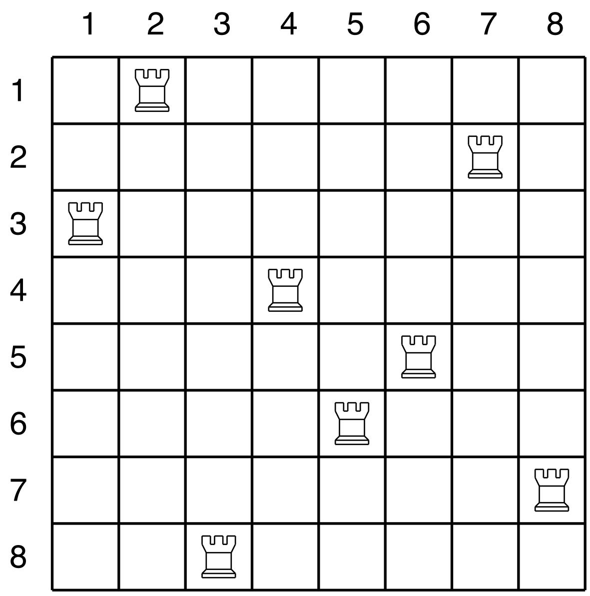
Shakkilautaa voi ajatella ruudukkona $[8] \times [8]$. Shakkipelissä torni-nappula liikkuu samaa pysy- tai vaakariviä pitkin. Jos samalla rivillä esiintyy kaksi tornia, sanotaan että ne uhkaavat toisiaan. Tähän liittyy perinteinen pähkinä:

4.2. Ongelma. *Kuinka monella tavalla tavalliselle 8×8 shakkilaudalle voidaan asettaa 8 toisiaan uhkaamatonta tornia?*

Toisin sanoen kuinka monella tavalla voidaan valita joukosta $[8] \times [8]$ 8-osajoukko S, joka ei sisällä kahta samalla rivillä olevaa pistettä? Koska kyseessä on 8-joukko ja jokainen 8:sta pystyrivistä sisältää korkeintaan yhden S:n alkion, jokaisella pystyrivillä on oltava tasan yksi S:n alkio. Täten $S = G(f)$ jollekin kuvaukselle $f : [8] \to [8]$. Vastaavasti voidaan päätellä, että jokaisella vaakarivillä on tasan yksi S:n piste. Lemman 4.1 nojalla siis S on permutaation kuvaaja ja vastaavasti jokaisen permutaation kuvaaja täyttää annetut ehdot. Tapoja sijoittaa tornit vaaditulla tavalla on siis yhtä paljon kuin joukon $[8]$ permutaatioita eli $8! = 40320$.

Hieman vaativampi tehtävä saadaan, kun kielletään asettamasta torneja annettuihin paikkoihin.

4.3. Ongelma. *Kuinka monella tavalla shakkilaudalle voidaan asettaa 8 toisiaan uhkaamatonta tornia, kun torneja ei saa asettaa ruutuihin (k, k), $1 \leq k \leq 8$?*



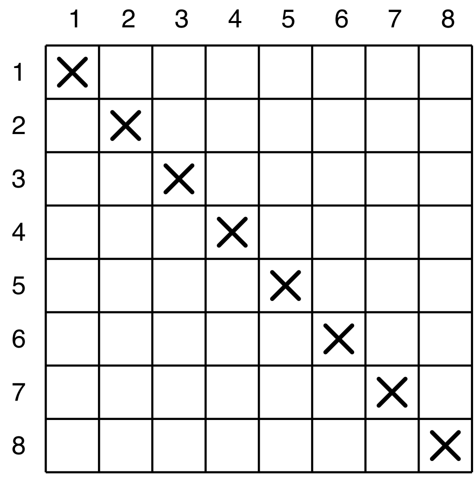
Kuva 9. Laudalle on asetettu 8 toisiaan uhkaamatonta tornia. Tämä vastaa permutaatiota, joka jonona ilmaistuna on $(3, 1, 8, 4, 6, 5, 2, 7)$. Kuvassa on vaakarivit numeroitu ylhäältä alas kuten matriisilaskennassa on tapana. Tämä poikkeaa edellisessä luvussa käytetystä hilan $\mathbf{Z}^2$ tavanomaisesta esittämistavasta ja myös shakkikirjallisuudessa vallitsevasta käytännöstä.

Nyt huomataan, että tornien asettelut vastaavat sellaisten permutaatioiden $f : [8] \to [8]$ kuvaajia, joille $f(k) \neq k$, kun $k \in [8]$. Lauseen 3.13 nojalla näitä on

$$8! \sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k}{k!} = 14833.$$

Ongelma 4.3 on esimerkki seuraavasta yleisestä tilanteesta. On annettu joukko $A \subseteq [n] \times [n]$ sekä luku $k \in \mathbf{N}$ kysytään kuinka monella tavalla voidaan asettaa k toisiaan uhkaamatonta tornia $[n] \times [n]$ laudalle niin, että yksikään niistä ei ole kielletyssä joukossa A. Tämä on sama asia kuin kysyä kuinka monella tavalla k toisiaan uhkaamatonta tornia voidaan asetella niin, että ne ovat kaikki joukossa $B = [n] \times [n] \setminus A$. Tässä siis uhkaaminen on tulkittava niin, että kaksi tornia uhkaa toisiaan, jos ne ovat samalla rivillä vaikka välissä olisi kiellettyjä ruutuja $a \in A$.

Kutsutaan nyt osajoukkoja $B \subseteq [n] \times [n]$ laudoiksi, kun $n \in \mathbf{N}$. Perusongelmana on selvittää kullekin k kuinka monella tavalla laudalle B voidaan asettaa k toisiaan uhkaamatonta tornia.



KUVA 10. Esimerkin 4.3 lauta, jossa kielletyt ruudut on merkitty rasteilla.

4.4. MÄÄRITELMÄ. *Olkoon B. Kullekin $k \in \mathbf{N}$määritellään laudan B torniluku $r_k(B)$ asettamalla*

$$r_k(B) = \#\{R \in B^{(k)} : R \text{ ei sisällä kahta samalla rivillä olevaa pistettä}\}.$$

Erityisesti määritelmästä seuraa, että $r_0(B) = 1$ kaikille laudoille, sillä on tasan yksi tapa sijoittaa 0 tornia mille hyvänsä laudalle.

4.5. ESIMERKKI. *Työnvälittäjällä on käytettävissään n työnhakijaaja m vapaata työpaikkaa. Kullakin työnhakijalla $i \in [n]$ on lista $B_i \subseteq [m]$ niistä työpaikoista joihin hän on pätevä. Olkoon nyt*

$$B = \{(i, j) \in [n] \times [m] : j \in B_i\}.$$

Tällöin $r_k(B)$ kertoo kuinka monella tavalla työnjohtaja voi valita k työnhakija täyttämään k eri työpaikkaa siten, että kukin hakija saa paikan johon hän on pätevä. Tärkeä kysymys on kuinka suuri k voi olla niin, että $r_k(B) > 0$, eli mikä on suurin mahdollinen määrä työpaikkoja jotka voidaan täyttää.

4.6. LEMMA. *Olkoon B lauta ja $|B| = m$. Tällöin $r_k(B) = 0$, kun $k > m$.*

TODISTUS. Jos laudalla on m pistettä ja $k > m$, niin laudalle on mahdotonta asettaa k tornia eri pisteille. Erityisesti sellaisten asettelujen lukumäärä, joissa tornit eivät uhkaa toisiaan on 0, joten tornilukujen määritelmän mukaan $r_k(B) = 0$. □

Ongelmat 4.2 ja 4.3 koskivat luvun $r_8(B)$ määrittämistä sopivilla laudoilla. Ratkaistaan nyt seuraava ongelman 4.2 yleistys eli lasketaan luvut $r_k(B)$, kun B on suorakaiteen muotoinen.

4.7. Lemma. *Olkoot $1 \leq m \leq n$ ja $B = [n] \times [m]$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbf{N}$ pätee*

$$r_k(B) = \binom{n}{k}\binom{m}{k}k!$$

Todistus. Valitaan $\binom{n}{k}$ tavalla mille pystyrivien k-joukolle $I \subseteq [n]$ tornit asetetaan, sitten $\binom{m}{k}$ tavalla vaakarivien k-joukolle $J \subseteq [m]$ tornit tulevat ja lopuksi $k!$ tavalla bijektio $\varphi : I \to J$, missä $\varphi(i)$ kertoo mille vaakariville $j \in J$ pystyrivin $i \in I$ torni tulee. Väite seuraa nyt tuloperiaatteesta. □

Ongelman 4.3 ilmeinen yleistys on, että $r_n(B) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, missä B on lauta joka saadaan poistamalla laudalta $[n] \times [n]$ lävistäjä $\{(k,k) : k \in [n]\}$.

4.2. Tornipolynomit. Seuraavaksi tarkastelemme erästä esimerkkiä algebran yhteyksistä kombinatoriikkaan liittämällä kombinatorisiin olioihin (laudat) algebrallinen olio (polynomi) ja tutkimalla näiden välisiä yhteyksiä. Laudan B torniluvut $r_k(B)$ muodostavat (äärettömän) lukujonon. Lemman 4.6 nojalla torniluvut ovat jostakin luvusta $m \leq |B|$ eteenpäin nollia. Laudan B tornipolynomi määritellään tällöin seuraavasti:

$$R_B(x) = r_0(B) + r_1(B)x + r_2(B)x^2 + \cdots + r_n(B)x^m.$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös seuraavasti:

$$R_B(x) = \sum_k r_k(B)x^k.$$

Yllä olevassa summamerkinnässä ei indeksille k asetettu ehtoa: tämä on tulkittava niin, että k käy käpi kaikki mahdolliset arvot läpi. Torniluvut $r_k(B)$ on määritelty kaikille $k \in \mathbf{N}$, mutta voimme tulkita yllä olevan lausekkeen äärelliseksi summaksi jättämällä pois kaikki termit $r_k(B)x^k$, missä $r_k(B) = 0$.

Tornipolynomi on esimerkki tavallisesta generoivasta funktiosta. Emme tässä esittele tavallisen generoivan funktion määritelmää tarkasti, mutta idea on, että potenssin x^k kerroin on jonkin äärellisen joukon mahtavuus, missä joukko riippuu parametrista k. Tornipolynomin tapauksessa parametri k kertoo sijoitettavien tornien lukumäärän. Generoivien funktioiden yhteydessä polynimit on tapana kirjoittaa niin, että muuttujan x potenssit esiintyvät kasvavassa järjestyksessä.

Koska $r_k(B) = 0$, kun $k > m$ tornipolynomi sisältää kaiken tiedon laudan B torniluvuista. Tornipolynomia voi siis ajatella tapana pitää kirjaa laudan kaikista torniluvuista kerralla. Esimerkiksi lemman 4.7 sisältö voidaan ilmaista seuraavasti: laudan $B = [n] \times [m]$ tornipolynomi on

$$R_B(x) = \sum_k r_k(B)x^k = \sum_k k!\binom{n}{k}\binom{m}{k}x^k.$$

Tornipolynomissa esiintyville termeille $r_k(B)x^k$ voidaan antaa kombinatorinen tulkinta, kun muuttujan x paikalle sijoitetaan luonnollinen luku c:

4.8. Lemma. *Olkoon B lauta ja $c \in \mathbf{N}$. Tällöin $r_k(B)c^k$ kertoo kuinka monella tavalla laudalle B voidaan asettaa k toisiaan uhkaamatonta tornia, kun jokaiselle tornille voidaan valita väri c värin joukosta*

Todistus. Seuraa suoraan tuloperiaatteesta: tornien paikat voidaan valita $r_k(B)$ tavalla ja värit c^k tavalla. □

4.9. Lemma. *Olkoon B lauta ja $c \in \mathbf{N}$. Tällöin $R_B(c)$ kertoo kuinka monella tavalla laudalle B voidaan asettaa toisiaan uhkaamattomia torneja, kun käytettävissä on eri värisiä torneja (kutakin väriä niin paljon, etteivät ne lopu) ja värien lukumäärä on c.*

Todistus. Seuraa lemmasta 4.8 ja summaperiaatteesta: jokaisessa tornien asettelussa on k tornia jollekin yksikäsitteiselle luvulle k. Kutakin k kohti saadaan $r_k(B)c^k$ tapaa asetella tornit ja valita värit, joten yhteensä tapoja on

$$r_0(B)c^0 + r_1(B)c^1 + \cdots r_n(B)c^n = R_B(c).$$

□

Esitellään nyt menetelmä, jolla voi laskea laudan tornipolynomin rekursiivisesti jakamalla lauta pienempiin osiin.

4.10. Lemma. *Olkoon B lauta ja $b \in B$. Olkoon C lauta, joka saadaan kun B:stä poistetaan piste b ja D lauta, joka saadaan, kun poistetaan B:stä kokonaan pisteen b sisältävät pysty- ja vaakarivi. Tällöin kaikille $k \geq 1$ pätee*

$$r_k(B) = r_{k-1}(D) + r_k(C).$$

Edellinen lemma on voimassa myös, kun $k = 0$, jos sovitaan, että jokaiselle laudalle pätee $r_{-1}(B) = 0$.

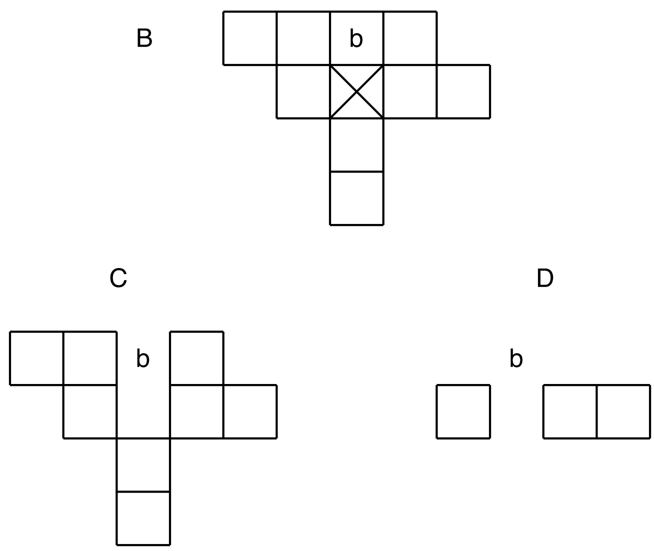
Todistus. Kun asetetaan laudalle B k tornia saadaan kaksi tapausta. Joko pisteeseen b tulee torni tai sitten ei tule. Jos b:hen tulee torni, niin loput $k-1$ tornia on asetettava laudalle D jotta ne eivät uhkaisi b:ssä olevaa tornia. Tämä voidaan tehdä $r_{k-1}(D)$ tavalla. Jos piteeseen b ei tule tornia kaikki k tornia on asetettava laudalle C, mikä voidaan tehdä $r_k(C)$ tavalla. Väite seuraa siis summaperiaatteesta. □

4.11. Lause. *Olkoon B lauta ja $b \in B$. Olkoon C lauta, joka saadaan kun B:stä poistetaan piste b ja D lauta, joka saadaan, kun poistetaan B:stä kokonaan pisteen b sisältävät pysty- ja vaakarivi. Tällöin lautojen B, C, D tornipolynomeille pätee*

$$R_B(x) = xR_D(x) + R_C(x).$$

Todistus.

$$\begin{aligned} xR_D(x) &= x(r_0(D) + r_1(D)x + \cdots r_n(D)x^n) \\ &= r_0(D)x + r_1(D)x^2 + \cdots r_n(D)x^{n+1} \end{aligned}$$



KUVA 11. Lemmassa 4.10 laudasta B saadaan laudat C ja D. Laudan B kuvassa esiintyvä rasti ilmaisee, että pisteen b alapuolella oleva piste ei kuulu B:hen

eli potenssin x^k kerroin polynimissa $xR_D(x)$ on $r_{k-1}(D)$, kun $k \geq 1$. Nyt voidaan siis soveltaa lemmaa 4.10

$$\begin{aligned} xR_D(x) + R_C(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} (r_{k-1}(D) + r_k(C))x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} r_k(B)x^k = R_B(x). \end{aligned}$$

□

Periaatteessa lauseen 4.11 avulla voidaan laskea minkä hyvänsä laudan tornipolynomi rekursiivisesti: lause antaa tavan palauttaa tehtävä kahden pienemmän laudan tornipolynomien määrittämistehtäväksi. Menetelmä antaa lisäksi vapauden valita piste $b \in B$ jonka suhteen sääntöä sovelletaan vapaasti.

Käsitellään seuraavaksi toinen laskusääntö, joka usein helpottaa konkreettisten tornipolynomien laskemista.

4.12. LAUSE. *Olkoot $A, B \subseteq [n] \times [n]$ lautoja, joilla ei ole yhteisiä pisteitä. Oletetaan lisäksi, että mikään A:n piste ei uhkaa mitään B:n pistettä. Tällöin*

$$R_{A \cup B}(x) = R_A(x)R_B(x).$$

TODISTUS. Kun laudalle $A \cup B$ asetetaan k toisiaan uhkaamatonta tornia jotkin i niistä ovat laudalla A ja $k-i$ laudalla B. Kutakin $0 \leq i \leq k$ kohti voidaan sijoittaa A-laudalle i tornia $r_i(A)$ tavalla ja tästä riippumatta B-laudalle $k-i$ tornia $r_{k-i}(B)$

tavalla jolloin koko sijoittelu voidaan tehdä $r_i(A)r_{k-i}(B)$ tavalla. Kun käydään läpi kaikki mahdolliset i:n arvot nähdään summaperiaatteesta, että

$$r_k(A \cup B) = \sum_{i=0}^{k} r_i(A)r_{k-i}(B).$$

Toisaalta polynomien tulon määritelmän nojalla

$$(\sum_k r_k(A)x^k)(\sum_k r_k(B)x^k) = \sum_k (\sum_{i=0}^{k} r_i(A)r_{k-i}(B))x^k$$

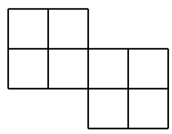
joten väitetyssä yhtälössä esiintyvillä polynomeilla on samat kertoimet. $\square$

Konkreettisissa laskutehtävissä on käytännöllistä merkitä annetun laudan tornipolynomia piirtämällä lauta sulkujen sisälle. Kun esimerkiksi kyse on 2×3 suorakaiteen muotoisesta laudasta kirjoitetaan:

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = 1 + 6x + 6x^2.$$

Tätä käytäntöä noudattaen voidaan laudan tornipolynomin lasku kirjoittaa auki. Seuraavassa on merkitty laskutoimitusten seuraamisen helpottamiseksi pisteellä se laudan ruutu johon sovelletaan seuraavaksi lauseen 4.11 sääntöä.

4.13. Esimerkki. *Lasketaan laudan*



tornipolynomi käyttäen hyväksi edellä esitettyjä sääntöjä.

$$\begin{pmatrix} \square & \square & & \\ \square & \square & \boxdot & \square \\ & & \square & \square \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \square & \square & & \\ & & & \\ & & & \square \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square & \square & & \\ \square & \square & & \square \\ & & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square & \square & & \\ \square & \square & & \boxdot \\ & & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix}$$

$$= x(1+2x)(1+x) + x(1+2x)(1+x) + (1+4x+2x^2)(1+2x)$$

$$= (x+3x^2+2x^3) + (x+3x^2+2x^3) + (1+6x+10x^2+4x^3) = 1+8x+16x^2+8x^3.$$

Tästä nähdään esimerkiksi, että kyseiselle laudalle voidaan asettaa kaksi toisiaan uhkaamatonta tornia 16 *tavalla.*

4.3. Osumapolynomit. Yksi motivaatio tornipolynomien määrittelemiselle oli permutaatioiden laskeminen. Olkoon $B \subseteq [n] \times [n]$. Kuinka moni permutaatio $\pi : [n] \to [n]$ ei toteuta mitään ehdoista $\pi(i) = j$, $(i, j) \in B$? Toisin sanoen kuinka monen permutaation $\pi \in S_n$ kuvaajalle pätee $G(\pi) \cap B = \emptyset$. Hieman yleisemmin voidaan kysyä kullekin $0 \leq k \leq n$ kuinka monelle permutaatiolle pätee

$$|G(\pi) \cap B| = k.$$

Määritellään laudan B osumaluvut $N_k(B)$ tämän kysymyksen motivoimana seuraavasti

$$N_k(n, B) = |\{\pi \in S_n : |G(\pi) \cap B| = k\}|.$$

Tarkkaan ottaen osumaluvut on siis määritelty kullekin n erikseen, mutta oletamme tässä, että n on kiinnitetty ja riittävän suuri että $B \subseteq [n] \times [n]$ ja kirjoitamme osumaluvut hieman lyhemmin $N_k(B) = N_k(n, B)$.

Laudan B ja sen komplementin osumalukujen välillä on yksinkertainen riippuvuus. Jokaisen permutaation $\pi \in S_n$ kuvaajalle pätee nimittäin $|G(\pi)| = n$. Täten $|G(\pi) \cap B| = k$ jos ja vain jos $|G(\pi) \cap B^C| = n - k$, joten määritelmän nojalla $N_k(B) = N_{n-k}(B^C)$

Kuten tornilukujen kohdalla meneteltiin määritellään laudan osumapolynomi seuraavasti:

$$N(B, x) = \sum_k N_k(B) x^k.$$

Seuraavaksi selvitetään miten laudan torniluvut ja osumaluvut liittyvät toisiinsa.

4.14. Lemma. *Olkoon $C \subseteq [n] \times [n]$ k-joukko. Tällöin*

$$|\{\pi \in S_n : C \subseteq G(\pi)\}| = \begin{cases} (n-k)!, \text{ jos } C \text{ ei sisällä toisiaan uhkaavia pisteitä} \\ 0, \text{ jos } C \text{ sisältää kaksi toisiaan uhkaavaa pistettä} \end{cases}$$

Todistus. Permutaatioiden kuvaajissa on tasan yksi piste jokaisella pysty- ja vaakarivillä, joten ne eivät sisällä toisiaan uhkaavia pisteitä. Erityisesti jos C sisältää toisiaan uhkaavia pisteitä se ei voi olla permutaation kuvaajan osajoukko.

Oletetaan nyt, että I ei sisällä toisiaan uhkaavia pisteitä. Tällöin I on jonkin bijektion $f : S \to T$ kuvaaja, missä $S, T \subseteq [n]$ ovat k-joukkoja. Jokainen tapa jatkaa f bijektioksi $[n] \to [n]$ vastaa bijektion määrittämistä $n-k$ joukolta $[n] \setminus S$ $n-k$-joukolle $[n] \setminus T$. Tämä voidaan tehdä $(n-k)!$ tavalla. $\square$

4.15. Lemma. *Olkoon $B \subseteq [n] \times [n]$ ja $0 \leq k \leq n$. Tällöin*

$$r_k(B)(n-k)! = \sum_{m=k}^{n} N_m(B) \binom{m}{k}.$$

TODISTUS. Lasketaan niiden parien (C, π) lukumäärä, missä $C \subseteq [n]$ on k-joukko ja $\pi \in S_n$ on permutaatio, joille pätee $C \subseteq G(\pi) \cap B$. Lasketaan näiden lukumäärä kahdella tavalla:

i) Valitaan ensin C. Lemman 4.14 nojalla riittää tarkastella osajoukkoja $C \in B^{(k)}$ jotka eivät sisällä toisiaan uhkaavia pisteitä. Tornilukujen määritelmän nojalla ehdot täyttävä C voidaan valita $r_k(B)$ tavalla. Lemman 4.14 permutaatio π voidaan kutakin C kohti valita $(n-k)!$ tavalla, joten laskettavien parien (C, π) lukumäärä on $r_k(B)(n-k)!$

ii) Valitaan ensin π. Tällöin $|B \cap G(\pi)| = m$ jollakin $0 \leq m \leq n$. Jos $m < k$ voidaan taas π jättää laskuista, sillä tällöin $B \cap G(\pi)$ ei voi sisältää k-joukkoa. Kutakin $m \geq k$ kohti voidaan määritelmän mukaan valita $N_m(B)$ permutaatiota, joille $|G(\pi) \cap B| = m$. Jokaista tällaista permutaatiota kohti voidaan k-joukko $CG(\pi) \cap B$ valita $\binom{m}{k}$ tavalla. Kun käydään läpi vaihtoehdot m:lle nähdään, että pari (C, π) voidaan yhteensä valita
$$\sum_{m=k}^{n} N_m(B)\binom{m}{k}$$
tavalla.

On siis osoitettu, että väitetyn yhtälön molemmat puolet ovat yhtäsuuria saman joukon mahtavuuden kanssa, joten väite on todistettu. $\square$

Seuraavaksi osoitetaan, että laudan osumapolynomi voidaan laskea, kun torniluvut tiedetään. Todistuksessa käytetään binomilausetta sovellettuna polynomeille muodossa
$$(y+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} y^k.$$

4.16. LAUSE. *Laudan $B \subseteq [n] \times [n]$ osumapolynomille pätee*
$$N(B, x) = \sum_{k=0}^{n} r_k(B)(n-k)!(x-1)^k.$$

TODISTUS.
$$\begin{aligned} N(B, y+1) &= \sum_{m=0}^{n} N_m(B)(y+1)^m = \sum_{m=0}^{n} N_m(B) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} y^k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq m \leq n} N_m(B)\binom{m}{k} y^k = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{m=k}^{n} N_m(B)\binom{m}{k}) y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} r_k(B)(n-k)! y^k. \end{aligned}$$
Lause seuraa nyt, kun sijoitetaan $y = x - 1$. $\square$

5. Kaksi suuntaa lisäopiskelulle

Generoivat funktiot, Hallin lause

5.1. Generoivat funktiot. Edellisessä luvussa esitellyt torni- ja osumapolynomit ovat esimerkkejä kombinatoriikassa käytetyistä generoivista funktioista. Lukujonon (a_n) (tavallisella) generoivalla funktiolla tarkoitetaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Laudan $B \subseteq [n] \times [n]$ tornipolynomissa $R_B(x)$ kertoimina esiintyvät laudan torniluvut $r_k(B)$, joten tornipolynomi on laudan tornilukujen generoiva funktio. Vastaavasti osumapolynomi on osumalukujen generoiva funktio. Molemmat edellämainitut ovat nimensä mukaisesti polynomeja, sillä jokaisen laudan torni- ja osumaluvuista vain äärellisen moni eroaa nollasta.

5.1. Esimerkki. *Olkoon a_n joukon $[n]$ osajoukkojen lukumäärä. Tiedetään, että $a_n = 2^n$, joten lukujonon (a_n) generoiva funktio on*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}.$$

Generoivista funktiosta on hyötyä usein, kun lukujono on annetu rekursion avulla. Seuraavassa esimerkissä käytetään kombinatorista päättelyä rekursiokaavan löytämiseksi.

5.2. Esimerkki. *Kuinka moni joukon $[n]$ osajoukko ei sisällä kahta peräkkäistä lukua?*

Olkoon b_n kysytty lukumäärä kullakin $n \in \mathbf{N}$. Suoraan käymällä läpi kaikki vaihtoehdot nähdään, että $b_0 = 1$ ja $b_1 = 2$. Osoitetaan, että luvut toteuttavat rekursiokaavan

$$b_n = b_{n-2} + b_{n-1},$$

kun $n \geq 2$. Olkoon siis $n \geq 2$. Joukon $[n]$ osajoukot, jotka eivät sisällä kahta peräkkäistä lukua voidaan jakaa kahteen ryhmään:

i) *Ne joukot $A \subseteq [n]$, joille $n \notin A$. Määritelmän mukaan tällaisia osajoukkoja on b_{n-1} kappaletta.*
ii) *Ne joukot $A \subseteq [n]$, joille $n \in A$. Koska vaaditaan, että A ei sisällä kahta peräkkäistä lukua, on $n-1 \notin A$. Mutta jokainen $A \subseteq [n]$, jolle $n \in A$ ja $n-1 \notin A$ ja joka ei sisällä kahta peräkkäistä lukua saadaan täsmälleen yhdestä joukosta $B \subseteq [n-2]$, joka ei sisällä kahta peräkkäistä lukua asettamalla $A = B \cup \{n\}$. Täten A voidaan nyt valita b_{n-2} tavalla.*

Summaperiaatteen nojalla siis $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$.

Ensimmäisessä luvussa mainitut Fibonaccin luvut määritellään asettamalla $F_0 = F_1 = 1$ ja $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, kun $n \geq 2$. Nyt $b_0 = F_1$ ja $b_1 = F_2$, joten induktiolla nähdään, että $b_n = F_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Edellisen esimerkin motivoimana laskemme Fibonaccin lukujen generoivan funktion.

5.3. LEMMA. *Fibonaccin lukujen (F_n) generoiva funktio on*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

TODISTUS. Merkitään

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Nyt näemme laskemalla, että

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n$$

ja vastaavasti

$$x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n.$$

Täten

$$(x+x^2)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-2}+F_{n-1})x^n = F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = f(x) - 1.$$

Yhtälö voidaan nyt kirjoittaa muotoon $(1-x-x^2)f(x) = 1$ ja väite seuraa tästä. □

Fibonaccin lukujen generoiva funktio on siis rationaalifunktio, eli kahden polynomin osamäärä. Seuraavassa annamme esimerkin siitä miten generoivan funktion avulla voi joissakin tapauksissa saada ratkaistuksi eksplisiittisen lausekkeen lukujonon jäsenille.

5.4. LAUSE. *Fibonaccin luvuille F_n on voimassa kaava*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

TODISTUS. Polynomilla $1-x-x^2$ on kaksi reaalista nollakohtaa, nimittäin $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Näiden avulla voidaan hajottaa polynomi tekijöihin

$$1-x-x^2 = -(x-\beta)(x-\alpha) = -\alpha\beta(1-\beta^{-1}x)(1-\alpha^{-1}x).$$

Funktio voidaan siis kirjoittaa lemman A.4 avulla seuraavasti:

$$f(x) = \left(\frac{-1}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{1}{1-\beta^{-1}x}\right)\left(\frac{1}{1-\alpha^{-1}x}\right) = \frac{-1}{\alpha\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$$

$$= \frac{-1}{\alpha\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{\beta})^k(\frac{1}{\alpha})^{n-k})x^n.$$

Tästä nähdään, että

$$F_n = \frac{-1}{\alpha\beta}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{\beta})^k(\frac{1}{\alpha})^{n-k}.$$

Koska $\beta^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\alpha$ saadaan lauseke sievennettyä seuraavasti:

$$F_n = \frac{1}{\alpha^n}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{\beta})^k(\frac{1}{\alpha})^{-k}.$$

$$= \frac{1}{\alpha^n}\sum_{k=0}^{n}(-\alpha)^k\alpha^k = \frac{1}{\alpha^n}\sum_{k=0}^{n}(-\alpha^2)^k.$$

Nyt voidan soveltaa äärellisen geometrisen summan kaavaa

$$\sum_{k=0}^{n} x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

sijoituksella $x = -\alpha^2$ ja saadaan edelleen

$$F_n = \alpha^{-n}\frac{1-(-\alpha^2)^{n+1}}{1+\alpha^2} = \frac{\alpha^{-n}+(-1)^n\alpha^{n+2}}{1+\alpha^2}$$

$$= (\frac{\alpha}{1+\alpha^2})(\alpha^{-n-1}+(-1)^n\alpha^{n+1})$$

Sijoittamalla nyt $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ saadaan väitetty lauseke. □

Samalla on ratkaistu myös puhtaasti kombinatorinen laskutehtävä 5.2, jossa ensi vaiheessa käytettiin kombinatorista päättelyä ratkaisun ilmaisemiseksi Fibonaccin lukujen avulla.

5.2. Hallin lause. Laudan $B \subseteq [n]\times[n]$ torniluku $r_k(B)$ ilmaisee kuinka monella tavalla voidaan valita k juokko $I \subseteq$ sekä injektio $f : I \to [n]$ siten, että $(i, f(i)) \in B$ kaikilla $i \in I$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $B \subseteq [k] \times [n]$, jolloin pystyrivien valintaa ei tarvitse tehdä. Jos merkitään $A_i = \{m \in [n] : (i, m) \in B\}$ kaikille $i \in [k]$, torniluku $r_k(B)$ kertoo kuinka monta injektiota $f : [k] \to \bigcup_{i\in[k]} A_i$ siten, että $f(i) \in A_i$ kaikilla $i \in [k]$. Usein on mielenkiintoista selvittää onko annetut ehdot täyttävää injektiota olemassa lankaan, eli onko $r_k(B) > 0$. Tällöin päädytään seuraavanlaiseen ongelmaan:

5.5. Esimerkki. *Työnvälittäjällä on joukko I työpaikkoja. Kuhunkin tehtävään $i \in I$ on joukko A_i päteviä työnhakijoita. Onko mahdollista täyttää kaikki työpaikat, kun kukin työnhakija $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ voidaan ottaa korkeintaan yhteen tehtävään?*

Työtehtävien jakaminen onnistuneesti vastaa täsmälleen sellaisen injektion $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ löytämistä, jolle $f(i) \in A_i$ kaikille $i \in I$.

Jos jollekin työpaikkojen osajoukolle $J \subseteq I$ pätee $|\bigcup_{i \in I} A_i| < |J|$, niin selvästi työpaikkojen jako ei onnistu: työpaikkoihin $j \in J$ kelpaavia on yhteensä vähemmän kuin täytettäviä paikkoja. Tämä havainto antaa motivaation seuraavalle määritelmälle.

Jos I on äärellinen joukko ja $(A_i)_{i \in I}$ on perhe äärellisiä joukkoja, niin sanotaan, että perhe $(A_i)_{i \in I}$ täyttää Hallin ehdon, jos kaikille $J \subseteq I$ pätee

$$|\bigcup_{j \in J} A_j| \geq |J|.$$

Totesimme siis, että Hallin ehto on välttämätön sopivan injektion olemassaololle. Hallin lauseen mukaan ehto on itse asiassa riittävä.

5.6. Lause (Hallin lause). *Olkoon I on äärellinen joukko ja $(A_i)_{i \in I}$ sen indeksöimä perhe äärellisiä joukkoja. Tällöin on olemassa injektio $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$, jolle $f(i) \in A_i$ kaikilla $i \in I$ jos ja vain jos perhe $(A_i)_{i \in I}$ täyttää Hallin ehdon.*

Todistus. Kuten edellä todettiin, Hallin ehto on välttämätön sellaisen injektion $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ olemassaololle, joka täytää ehdon $f(i) \in A_i$ kaikilla $i \in I$. Todistetaan siis, että Hallin ehto on riittävä ehto sopivan injektion olemassaololle.

Käytetään tähän induktiota indeksijoukon I mahtavuuden suhteen. Kun $|I| = 1$ Hallin ehto vastaa sitä, että joukkoperheen ainoa joukko A_i, $I = \{i\}$ on epätyhjä, jolloin sopiva injektio voidaan määritellä kuvaamalla i mielivaltaiselle joukon A_i alkiolle. Hallin lause pätee siis tapauksessa $|I| = 1$.

Käydään nyt läpi induktioaskel. Olkoon $n \geq 2$ ja oletetaan, että Hallin lause on voimassa aina, kun indeksijoukon mahtavuus on korkeintaan $n - 1$. Osoitetaan, että Hallin lause on voimassa myös, kun indeksijoukon mahtavuus on n. Olkoon siis $|I| = n$ ja $(A_i)_{i \in I}$ perhe joukkoja, joka täyttää Hallin ehdon. Nyt voidaan kysyä onko olemassa joukkoa J, jolle pätee

$$\emptyset \neq J \subsetneq I \text{ ja } |\bigcup_{j \in J} A_j| = |J|. \tag{5.7}$$

Tarkastellaan kahta tapausta erikseen.

Tapaus I

Ensiksi tarkastellaan tapausta, että ehdon 5.7 täyttävää J ei ole olemassa. Koska perhe $(A_i)_{i \in I}$ täyttää Hallin ehdon, aina kun $\emptyset \neq J \subsetneq I$ on voimassa

$$|\bigcup_{j \in J} A_j| \geq |J| + 1. \tag{5.8}$$

Valitaan nyt mielivaltainen indeksi $q \in I$ sekä mielivaltainen alkio $r \in A_q$. Tarkastellaan joukkoperhettä, joka saadaan luonnollisella tavalla poistamalla alkio q ja r tilanteesta. Olkoon siis $I' = I \setminus \{q\}$ sekä $B_i = A_i \setminus \{r\}$ kaikilla $i \in I'$. Osoitetaan, että perhe $(B_i)_{i \in I'}$ toteuttaa Hallin ehdon.

Nyt, kun $\emptyset \neq J \subseteq I'$ pätee

$$|\bigcup_{j\in J} B_j| = |\bigcup_{j\in J} A_j \setminus \{r\}| \geq |\bigcup_{j\in J} A_j| - 1 \geq |J|.$$

Perhe $(B_i)_{i\in I}$ täyttää siis Hallin ehdon ja induktio-oletuksen nojalla voidaan valita injektio $f' : I' \to \bigcup_{i\in I'} B_i$, joka täyttää ehdon $f'(i) \in B_i$ kaikilla $i \in I'$. Tämä injektio voidaan nyt laajentaa injekioksi $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ asettamalla $f(q) = r$. Nyt $f(i) \in A_i$ kaikilla $i \in I$, joten Hallin lause on voimassa joukkoperheelle $(A_i)_{i\in I}$.

Tapaus II

Oletamme nyt, että jollekin J pätee ehto 5.7. Tällöin joukkoperhe $(A_j)_{j\in J}$ toteuttaa Hallin ehdon, joten iduktio-oletuksen nojalla on olemassa injektio $f_J : J \to \bigcup_{j\in J} A_j$, jolle pätee $f_J(j) \in A_j$ kaikilla $j \in J$. Tarkastellaan jäljelläolevia indeksejä ja joukkoja.

Olkoon $K = I \setminus J$. Määritellään nyt joukkoperhe $(C_k)_{k\in K}$ asettamalla

$$C_k = A_k \setminus \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Varmistetaan, että myös $(C_k)_{k\in K}$ toteuttaa Hallin ehdon. Olkoon siis $L \subseteq K$. Tällöin voidaan käyttää summaperiaatetta:

$$|\bigcup_{l\in L} C_l| + |\bigcup_{j\in J} A_j| = |\bigcup_{l\in L} C_l \cup \bigcup_{j\in J} A_j|$$

$$= |\bigcup_{i\in L\cup J} A_i| \geq |L| + |J|.$$

Tästä seuraa, että

$$|\bigcup_{l\in L} C_l| \geq |L|,$$

joten on osoitettu, että perhe $(C_k)_{k\in K}$ toteuttaa Hallin ehdon. Koska $|K| < n$ voimme taas käyttää induktio-oletusta ja todeta, että on olemassa injektio $f_K : K \to \bigcup_{k\in K} C_k$, niin että $f(k) \in C_k$ kaikilla $k \in K$.

Edellä esitetys konstruktion seurauksena kuvaukset f_J ja f_K voidaan yhdistää injektioksi $f : J \cup K \to \bigcup_{i\in I} A_i$, joka toteuttaa ehdon $f(i) \in A_i$ kaikilla $i \in I$. Hallin lause on siis voimassa joukkoperheelle $(A_i)_{i\in I}$. $\square$

5.3. Kirjallisuutta. Hyvä perusoppikirja, joka käsittelee suureksi osaksi tässä monisteessa esiteltyjä aiheita -tornipolynomien teoriaa lukuunottamatta - on Peter Cameronin kirja “Combinatorics”. Klassisempi teos, jossa myös tornipolynomit käsitellään on John Riordanin “Introduction to Combinatorial Analysis”. Molemmissa käsitellään myös generoivia funktioita.

Edistyneemmälle lukijakunnalle suunnattu Richard Stanleyn kirja “Enumerative Combinatorics I” käsittelee generoivien funktioiden teoriaa perusteellisesti. Nimensä mukaisesti teoksella on myös jatko-osa.

Hallin lause edustaa tässä monisteessa jokseenkin muista erillistä kombinatoriikan osa-aluetta, joka keskittyy äärellisten joukkojen välisiin kuvauksiin ja relaatioihin yleisellä tasolla. Suositeltavia kirjoja tästä kiinnostuneille ovat Bela Bollobasin "Combinatorics" sekä Ian Andersonin "Combinatorics of Finite Sets".

Liite A. Potenssisarjat ja polynomit

A.1. Yleiset potenssisarjat. Potenssisarjat ovat polynomien yleistys, missä termejä sallitaan ääretön määrä. Analyysissä ollaan kiinnostuneita potenssisarjojen määrittelemistä funktioista, eli analyyttisistä funktioista. Kombinatoriikan yhteydessä on kuitenkin hyödyllisempää käsitellä potenssisarjoja puhtaasti algebralliselta kannalta. Näinollen asetetaan seuraava määritelmä, missä emme aseta mitään vaatimuksia suppenemiselle, kun muuttujan paikalle sijoitetaan reaaliluku.

A.1. Määritelmä. *Potenssisarja on lauseke*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

jossa esiintyy muuttuja x ja reaalilukujono (a_k).

Potenssisarjoille määritellään yhteen- ja kertolasku seuraavasti.

A.2. Määritelmä. *Potenssisarjojen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \textit{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

summa ja tulo määritellään seuraavasti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

ja

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{k} a_i b_{k-i}) x^k.$$

Huomion arvoista on se, että potenssisarjojen summan ja tulon kunkin kertoimen selvittämiseksi tarvitaan äärellinen määrä summan tai tulon tekijöiden kertoimia. Näiden laskutoimitusten määritelmiin tarvitaan siis vain tavallisia reaalilukujen yhteen- ja kertolaskuja, ei äärettömien sarjojen suppenemista. Yhteenlaskun määritelmä ei tuottane hankaluuksia. Kertolaskun määritelmän perusteluna on, että monomeille pätee $x^i x^j = x^{i+j}$ ja että tulon tekijöissä käydään kutakin $k \in \mathbf{N}$ kohti läpi kaikki tekijöissä esiintyvät indeksiparit (i, j), joille $i + j = k$.

Määritelmän seurauksena voidaan osoittaa, että seuraavat tutut laskusäännöt ovat voimassa potenssisarjoille:

A.3. Lemma. *Olkoot f, g, h potenssisarjoja. Tällöin*

i) $(f + g) + h = f + (g + h)$
ii) $f + g = g + f$
iii) $(f + g)h = f(gh)$
iv) $fg = gf$
v) $f(g + h) = fg + fh.$

Näiden sääntöjen ansiosta, voidaan ottaa käyttöön tavanomainen potenssimerkintä polynomeille. Kun $k \geq 1$ merkitään

$$f^k = \underbrace{ff\cdots f}_{k \text{ kpl}}.$$

Usein potenssisarjoille käytetään merkintää, jossa muuttuja x näkyy, esimerkiksi $f(x)$. Potenssisarjaa $f(x)$ sanotaan kääntyväksi, jos on olemassa potenssisarja $g(x)$, jolle $f(x)g(x) = 1$. Tällöin merkitään $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Voidaan osoittaa, että potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ on kääntyvä, jos ja vain jos vakiotermi $a_0 \neq 0$. Erikoistapaus potenssisarjasta on geometrinen sarja, missä kertoimet muodostavat geometrisen jonon (a_k), eli a_k pätee $a_k = a^k$ jollakin $a \in \mathbf{R}$.

A.4. Lemma. *Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Tällöin*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = \frac{1}{1-ax}.$$

Todistus.

$$\begin{aligned}(1-ax)\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+1} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a^k x^k = 1.\end{aligned}$$

□

A.2. Polynomit. Analyysissä polynomeja

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ajatellaan funktioina. Toisin sanoen ollaan kiinnostuneita funktiosta f, missä $f(t)$ määritellään sijoittamalla muuttujan x paikalle reaaliluku (tai yleisemmin kompleksiluku) t ja laskemalla lausekkeen arvo. Funktiota, joka on määritelty polynomilausekkeen avulla kutsutaan polynomifunktioksi.

Kombinatoriikassa polynomeja on useimmiten lunnollisinta ajatella algebrallisesta lähtökohdasta. Polynomin määritelmä tuo enää pienen täydennyksen edellä esitettyyn potenssisarja määritelmään.

A.5. Määritelmä. *Polynomi on lauseke*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

jossa esiintyy muuttuja x ja reaalilukujono (a_k), jolla on se ominaisuus että $a_k \neq 0$ vain äärellisen monella indeksin k arvolla.

Kaikkien reaalikertoimisten polynomien joukkoa merkitään symbolilla $\mathbf{R}[x]$. Käytännössä polynomien merkinnässä jätetään pois termit $a_k x^k$, joille $a_k = 0$. Kun valitaan m niin suureksi, että $a_k = 0$ aina kun $k > m$ voidaan kirjoittaa polynomi tuttuun tapaan:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m.$$

Määritelmän mukaan kaksi polynomia

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ovat samat, jos niillä on samat kertoimet, eli $a_k = b_k$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Sama polynomi voidaan kuitenkin esittää eri tavalla riipuen siitä mitkä nollakertoimiset termit kirjoitetaan esitykseen mukaan. Esimerkiksi

$$5 + 2x + 7x^3 = 5 + 2x + 0x^2 + 7x^3.$$

tarkoittaa, että kummallakin puolella esiintyy polynomi, jolla on samat kertoimet. Tästä seuraa yhtälön analyysistä tutumpi tulkinta, nimittäin että kaikille reaaliluvuille t pätee

$$5 + 2t + 7t^3 = 5 + 2t + 0t^2 + 7t^3.$$

Polynomeille käytetty merkintä $p(x)$ on muistuttamassa siitä, että muuttujan x paikalle voidaan sijoittaa reaaliluku. Yleisen potenssisarjan kohdalla reaaliluvun sijoittaminen on perusteltava suppenemistarkastelulla, mutta polynomien kohdalla tätä ongelmaa ei ole. Jos siis $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ ja $c \in \mathbf{R}$, niin $p(c) \in \mathbf{R}$. Erityisesti $p(0)$ on polynomin $p(x)$ vakiotermi. Polynomin muuttujan paikalle voidaan kuitenkin sijoittaa myös toinen polynomi (tai yleisemmin esimerkiksi potenssisarja), jolloin tuloksena on polynomi (vastaavasti potenssisarja), jonka kertoimet voi laskea esitettyjen lakusääntöjen avulla. Esimerkiksi, jos $p(x) = 1 + 2x + x^3$, niin

$$p(x+2) = 1 + 2(x+2) + (x+2)^3 = 13 + 8x + 6x^2 + x^3.$$

Muodollisesti polynomien sijoitus määritellään seuraavasti:

A.6. Määritelmä. *Olkoot*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \textit{ja} \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

missä $p(x)$ on polynomi ja $q(x)$ on potenssisarja. Tällöin määritellään

$$p(q(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q(x)^k$$

Myös potenssisarjaan $f(x)$ voidaan muuttujan paikalle sijoittaa potenssisarja $q(x)$, kun jälkimmäisen vakiotermi on 0. Tällöin kuitenkin yllä oleva määritelmä tarvitsee vielä pienen tarkennuksen, sillä emme ole esittäneet määritelmää äärettömälle summalle, jossa termit ovat potenssisarjoja. Suurpiirteisesti ilmaistuna vaatimus on, että jos

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x)$$

on sarja, jossa kukin $q_k(x)$ on potenssisarja, niin summa on määritelty potenssisarjana, jos kunkin termin x^n kerroin poikkeaa nollasta vain äärellisen monessa sarjoista $q_k(x)$.

Viitteet

[And] ANDERSON, IAN: Combinatorics of Finite Sets. Oxford University Press, 1989, Oxford.
[Bol] BOLLOBAS, BELA: Combinatorics. Cambridge University Press, 1986, Cambridge.
[Cam] CAMERON, PETER: Combinatorics. Cambridge University Press, 1994, Cambridge.
[Rio] RIORDAN, JOHN: Introduction to Combinatorial Analysis. Wiley, 1958, New York.
[Sta1] STANLEY, RICHARD: Enumerative Combinatorics I. Cambridge University Press, 1997, Cambridge.
[Sta2] STANLEY, RICHARD: Enumerative Combinatorics II. Cambridge University Press, 1999, Cambridge.