Todennäköisyyslaskenta s-2009, 2. kurssikoe 21.12.2009

Kokeessa saa käyttää laskinta sekä MAOL-taulukoita.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x,y) = c\,xy, \quad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla.

a) Ratkaise vakion c arvo.

b) Laske todennäköisyys $P(0 < X < \frac{1}{2} \text{ ja } 0 < Y < \frac{1}{2})$.

2. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} Y|X &\sim N(X, X^2) \\ X &\sim N(2, 1), \end{aligned}$$

jossa $N(\mu, \sigma^2)$ tarkottaa normaalijakaumaa odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2.
Laske EY ja $\operatorname{var} Y$.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on kummallakin eksponenttijakauma parametrilla $\lambda > 0$. (Muistanet, että eksponenttijakauman tiheysfunktio on $\lambda\,\exp(-\lambda\,z)$ kun $z > 0$). Määritellään muuttujat S ja U kaavoilla

$$S = X + Y, \quad U = X.$$

Johda muuttujien S ja U yhteistiheysfunktion $f_{S,U}$ kaava. Johda lisäksi muuttujan U ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $S = s$, sekä tunnista kyseinen (tuttu) jakauma.

4. Olkoon n-ulotteisella satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ standardinormaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalinen (eli $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään $\mathbf{Y} = \mathbf{QX}$.

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ kahtia siten, että $\mathbf{U} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista (jossa $1 \le k < n$) ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \ldots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään vielä satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T\mathbf{U}, \qquad Z_2 = \mathbf{V}^T\mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Perustele, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mitkä ovat satunnaismuuttujien Z_1 ja Z_2 jakaumat?