Todennäköisyyslaskennan kurssi, 9. harjoitus (2.–3.12.2009)

1. Olkoon $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ sv, jolle

$$E\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & -1 \\ 1.5 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Laske $E\mathbf{Y}$ ja $\operatorname{Cov}(\mathbf{Y})$, kun sv $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ määritellään (sv:n $\mathbf{X}$ affiinina muunnoksena) kaavoilla

$$Y_1 = 5 + X_1 + X_2 + X_3, \qquad Y_2 = 2 + 2X_1 + X_2 - X_3.$$

2. Olkoot $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ n-ulotteisia satunnaisvektoreita, joille

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}_X, \quad \operatorname{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma}_Y, \quad \operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma}_{XY}$$

Johda niiden summan kovarianssimatriisille seuraava kaava sekä a-kohdan että b-kohdan menetelmällä,

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma}_X + \mathbf{\Sigma}_Y + \mathbf{\Sigma}_{XY} + \mathbf{\Sigma}_{XY}^T$$

a) Käytä kaavaa $\operatorname{Cov}(\mathbf{V}) = \operatorname{cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ sekä operaattorin $\operatorname{cov}(\cdot, \cdot)$ ominaisuuksia.

b) Tarkastele osavektoreista $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ muodostettua yhdistettyä vektoria $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, jossa on ensin sv:n $\mathbf{X}$ komponentit ja sitten sv:n $\mathbf{Y}$ komponentit. Kirjoita $\operatorname{Cov}(\mathbf{Z})$ annettujen matriisien avulla, esitä summa $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ muodossa $\mathbf{AZ}$ valitsemalla matriisi $\mathbf{A}$ sopivasti, sekä sovella kaavaa $\operatorname{Cov}(\mathbf{AZ}) = \mathbf{A} \operatorname{Cov}(\mathbf{Z}) \mathbf{A}^T$.

3. (Lineaarinen sekamalli (engl. *linear mixed model*).) Tarkastellaan mallia

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{ZU} + \boldsymbol{\epsilon},$$

jossa $\mathbf{X}$ on deterministinen $n \times p$-matriisi, $\mathbf{Z}$ on deterministinen $n \times k$-matriisi ja $\boldsymbol{\beta}$ on deterministinen vektori. $\mathbf{U}$ ja $\boldsymbol{\epsilon}$ ovat riippumattomia satunnaisvektoreita siten, että $\mathbf{U}$ on k-komponenttinen sv, jolle $E\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ja $\operatorname{Cov}(\mathbf{U}) = \mathbf{D}$, ja $\boldsymbol{\epsilon}$ on n-komponenttinen sv, jolle $E\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$ ja $\operatorname{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{\Sigma}$. Laske $E\mathbf{Y}$ ja $\operatorname{Cov}(\mathbf{Y})$.

4. (Choleskyn hajotelma.) Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ kaksiulotteisen satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = (X, Y)$ kovarianssimatriisi. Esitä se muodossa $\mathbf{AA}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on 2×2-alakolmiomatriisi, ts. etsi esitys

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\,\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\,\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \mathbf{AA}^T, \quad \text{jossa} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(Opastus: Kirjoittamalla matriisitulon auki saat kolme riippumatonta yhtälöä. Yhtälöitä on yksi kutakin kovarianssimatriisin alkiota kohti, mutta matriisin $\mathbf{\Sigma}$ sekä matriisin $\mathbf{AA}^T$ symmetrisyys eliminoi yhtälöistä yhden. Ratkaise yhtälöt järjestyksessä (1, 1), (1, 2), (2, 2).)

5. Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia sm:ia, joilla on yhteinen odotusarvo $EX_i = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var}(X_i) = \sigma_2$. Osoita, että $EY = (n-1)\sigma^2$, kun Y määritellään kaavoilla

$$Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2, \quad \text{jossa} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Opastus: yksi järkevä tapa lähteä liikkeelle on vähentää ja lisätä μ sekä kertoa auki binomi $(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2$.

6. (Lisätehtävä, josta saa ylimääräisen harjoituspisteen.) Olkoot sv:t $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$ ja $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ ja $\mathbf{H}(\mathbf{Y})$ niiden matriisiarvoisia funktioita, joiden dimensiot ovat sellaisia, että matriisitulo $\mathbf{G}(\mathbf{X})\,\mathbf{H}(\mathbf{Y})$ voidaan muodostaa. Satunnaisvektoreiden riippumattomuudesta seuraa, että $g(\mathbf{X}) \perp\!\!\!\perp h(\mathbf{Y})$, kun g ja h ovat mielivaltaisia reaaliarvoisia vektoriargumentin funktioita. Todista tämän nojalla, että

$$E[\mathbf{G}(\mathbf{X})\,\mathbf{H}(\mathbf{Y})] = E[\mathbf{G}(\mathbf{X})]\,E[\mathbf{H}(\mathbf{Y})]$$