

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 8. harjoitus (25.–26.11.2009)

1. Olkoon $h(X)$ mielivaltainen sm:n X funktio, ja olkoon $m(X) = E(g(X, Y) | X)$. Todista, että

$$E[(g(X, Y) - h(X))^2] = E[(g(X, Y) - m(X))^2] + E[(m(X) - h(X))^2],$$

ja päättelä tästä, että sm:n $g(X, Y)$ paras ennuste sm:n X funktiona keskineliövirheen mielessä on ehdollinen odotusarvo $m(X) = E[g(X, Y) | X]$ (ts. todista lause 7.2). Opastus: kerro binomi auki kaavassa

$$E[(g(X, Y) - h(X))^2] = E[(g(X, Y) - m(X) + m(X) - h(X))^2],$$

ja käytä ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia.

2. Todista lauseen 7.4 kaava

$$\text{var}(g(X, Y)) = E \text{var}(g(X, Y) | X) + \text{var} E(g(X, Y) | X)$$

Päättele tästä, että *ehdollistaminen pienentää varianssia*, eli että sm:n $E(g(X, Y) | X)$ varianssi on enintään yhtä suuri kuin sm:n $g(X, Y)$ varianssi.

3. Oletetaan, että

$$\begin{aligned} Y | X &\sim N(m(X), (1 - \rho^2)\sigma_Y^2), \\ X &\sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \end{aligned}$$

jossa $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}$, $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ ja $-1 < \rho < 1$ ovat vakioita. Regressiofunktiolle $m(x)$ oletetaan esimerkin 7.6 muoto, eli

$$m(x) = E(Y | X = x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X).$$

Osoita, että yhteistiheys $f_{X,Y}$ voidaan kirjoittaa esimerkissä 7.6 ilmoitettuun kaksiulotteisen normaalijakauman muotoon.

Opastus: Matriisi \mathbf{C} voidaan kääntää symbolisesti; kun \mathbf{A} on 2×2 -matriisi, eli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{niin} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{jossa} \quad \det \mathbf{A} = ad - bc.$$

4. (Negatiivinen binomijakauma Poissonin jakaumien sekoitteena). Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X | Y &\sim \text{Poi}(\lambda Y) \\ Y &\sim \text{Gam}(s, s), \end{aligned}$$

jossa $\lambda, s > 0$ ovat vakioita. Tässä X on diskreetti ja Y jatkuva sm.

a) Kirjoita yhteisjakauman tiheys, ja johda siitä X :n reunajakauman ptnf integroimalla. Tulokseksi tulee tietty negatiivinen binomijakauma. Mitkä ovat sen parametrit?

b) Laske X :n reunajakauman odotusarvo ja varianssi ehdollistamalla, eli käytämällä kaavoja

$$EX = E[E(X | Y)], \quad \text{var} X = E \text{var}(X | Y) + \text{var} E(X | Y).$$

Tarkista, että johtamasi kaavat ovat yhtäpitäviä luvussa 4.1.5 annettujen negatiivisen binomijakauman odotusarvon ja varianssin kaavojen kanssa.

5. Edellisen tehtävän tilanteessa sm:n Y ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$ (jossa $x \geq 0$ on kokonaisluku) on tietty luvussa 4 käsitelty jakauma. Mikä? Opastus: kirjoita $f_{X,Y}(x, y)$ muodossa $f_Y(y) f_{X|Y}(x | y)$ ja tunnista ehdollinen jakauma tarkastelemalla tulosta muuttujan y funktiona.