Todennäköisyyslaskennan kurssi, 7. harjoitus (18.–19.11.2009)

1. Todista, että (ks. kaava (6.3)),

$$E[\mathbf{AZB} + \mathbf{C}] = \mathbf{A}(E\mathbf{Z})\mathbf{B} + \mathbf{C},$$

jossa $\mathbf{Z}$ on satunnaismatriisi ja $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ ovat vakiomatriiseja, joiden dimensiot ovat sellaiset, että lauseke $\mathbf{AZB} + \mathbf{C}$ on määritelty.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = X + Y \qquad V = X - Y,$$

kuten esimerkissä 6.9. Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio. Laske sekä satunnaismuuttujan U että satunnaismuuttujan V reunatiheysfunktiot. (Tarkista U:n reunatiheys käyttämällä gammajakauman yhteenlaskuominaisuutta.)

3. Esimerkissä 6.11 hahmotellaan, kuinka t-jakauman tiheysfunktio johdetaan muuttujanvaihtotekniikalla jakauman probabilistisesta luonnehdinnasta. Tarkista kyseisen esimerkin yksityiskohdat.

4. Olkoot $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ ja $Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ riippumattomia, ja määritellään $U = X + Y$. Osoita, että sm:n X ehdollinen jakauma ehdolla $U = u$ tietty otoskokoa $u \geq 0$ vastaava binomijakauma.

Opastus: yptnf:n lauseke on helppo kirjoittaa muodossa $f_{X,U}(x,u) = f_X(x)\, f_{U|X}(u \mid x)$, jossa esiintyvä ehdollinen ptnf $f_{U|X}(u \mid x) = P(X + Y = u \mid X = x)$ on tietenkin Poissonin jakauman ptnf sopivasti siirrettynä. U:n reuna-ptnf:n löydät summaamalla (tai käyttämällä Poissonin jakauman yhteenlaskuominaisuutta). Loppuosa tehtävästä seuraa muokkaamalla jakolaskun $f_{X,U}(x,u)/f_U(u)$ tulosta.

5. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = 8\,xy, \qquad 0 < y < x < 1$$

(ja nolla muualla).

a) Laske ehdollinen tiheys $y \mapsto f_{Y|X}(y \mid x)$ kullakin $0 < x < 1$.

b) Laske $m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X}(y \mid x)\, \mathrm{d}y$ (eli ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X = x)$), kun $0 < x < 1$.

c) Laske $v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m(x))^2\, f_{Y|X}(y \mid x)\, \mathrm{d}y$ (eli ehdollinen varianssi $\mathrm{var}(Y \mid X = x)$), kun $0 < x < 1$.