Todennäköisyyslaskennan kurssi, 6. harjoitus (11.–12.11.2009)

1. Diskreettien, kokonaislukuarvoisten satunnaismuuttujien X ja Y yptnf on

$$f(x,y) = c(2x+y), \qquad 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2$$

kokonaislukupareille (x,y).

a) Taulukoi yptnf suureen c funktiona (ks. esimerkki 6.2). b) Laske c:n arvo. c) Laske reunajakaumien ptnf:t. d) Ovatko X ja Y riippumattomia?

2. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f(x,y) = c\,x\,y^2, \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1,$$

(ja $f(x,y)$ häviää muuten).

Laske c sekä reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y. Ovatko X ja Y riippumattomia?

3. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f(x,y) = c\,x\,y^2, \qquad 0 \le y \le x \le 1,$$

(ja $f(x,y)$ häviää muuten).

Laske c sekä reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y. Ovatko X ja Y riippumattomia?

4. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f(x,y) = \frac{1}{8}\,(x+y) \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2.$$

(ja $f(x,y)$ häviää muuten).

a) Laske $P(X+Y<1)$. b) Laske $E(XY)$.

5. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joilla on äärelliset varianssit siten, että X:n varianssi on aidosti nollaa suurempi. Merkitään $\mu_X = EX$, $\mathrm{var}(X) = \sigma_X^2$, $\mu_Y = EY$, $\mathrm{var}(Y) = \sigma_Y^2$ sekä $\rho = \mathrm{corr}(X,Y)$. Seuraava lasku osoitta, että satunnaismuuttujan Y paras ennuste satunnaismuuttujan X affiinilla funktiolla $\alpha + \beta(X - \mu_X)$ on

$$\mu_Y + \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\,(X - \mu_X). \tag{1}$$

silloin, kun minimoidaan keskineliövirhettä, eli funktiota

$$g(\alpha,\beta) = E\left[(Y - \alpha - \beta(X-\mu_X)\right]^2.$$

a) Laske funktion g gradientti ∇g sekä Hessen matriisi $\mathbf{H}_g$ (toinen merkintä: $\nabla^2 g$), eli

$$\nabla g(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} D_1\,g \\ D_2\,g \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_g(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} D_{11}\,g & D_{12}\,g \\ D_{12}\,g & D_{22}\,g \end{bmatrix}$$

jossa $D_i\,g$ on funktion g osittaisderivaatta i:nnen muuttujan suhteen ja $D_{ij}\,g$ on toisen kertaluvun osittaisderivaatta i:nnen ja j:nnen muuttujan suhteen.

b) Osoita, että funktiolla g on yksikäsitteinen kriittinen piste eli sellainen piste, jossa sen gradientti saa arvokseen nollavektorin. Tarkista, että kriittinen piste vastaa kaavaa (1). Tarkista lisäksi, että funktion g Hessen matriisi (kriittisessä pisteessä laskettuna) on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat positiivisia. Nämä kaksi asiaa todistavat yhdessä, että kriittinen piste on minimipiste (sillä tällainen Hessen matriisi on positiivisesti definiitti).

c) Jos $\rho^2 = 1$, niin näytä, että todennäköisyydellä yksi pätee $Y = \mu_Y + \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\,(X - \mu_X)$.