

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 5. harjoitus (14.–15.10.2009)

1. Olkoon X sm, joka saa vain aidosti positiivisia arvoja, $X > 0$. Oletetaan, että sekä odotusarvo EX että $E(1/X)$ on olemassa. Osoita, että

$$EX + E[1/X] \geq 2$$

Anna esimerkki satunnaismuuttujasta, jolle epäyhtälö toteutuu yhtälönä. (Vakiot ovat myös sm:ia.)

2. Todista geometrisen jakauman ns. muistinmenetysominaisuus: jos $0 < p < 1$ ja $X \sim \text{Geom}(p)$, niin kaikilla kokonaisluvuilla $x, y \geq 0$

$$P(X \geq x + y \mid X \geq x) = P(X \geq y).$$

3. Olkoon sm:lla X tasajakauma $U(-1, 1)$. Laske jakauman momenttiemäfunktio ja kehitä se potenssisarjaksi. Päättele tuloksesta momentit EX^k , kun $k = 1, 2, \dots, 6$.

Tarkista lopuksi, että saat samat tulokset suoraan integroimalla.

4. Olkoon $X \sim N(0, 1)$. Johda kaavat X :n momenteille $EX^k, k = 1, 2, \dots, 8$ seuraavilla kahdella menetelmällä.

a) Kehitä integraalia $EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$. Parittomat momentit häviävät (miksi?). Kun k on parillinen, palauta integraali ensin välin $(0, \infty)$ yli lasketuiksi integraaliksi, tee muuttujanvaihto $y = x^2/2$ ja huomaa, että integraalista tulee tietty vakio kertaa gammafunktion arvo. Kehitä gammafunktio kaavoilla $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ja $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \forall t > 0$.

b) Kehitä jakauman momenttiemäfunktio $M(t) = \exp(t^2/2)$ potenssisarjaksi, ja tutki sarjan termejä.

5. Sm:lla X on lognormaalijakauma parametreilla μ ja σ^2 (jossa $\sigma > 0$), jos

$$X = \exp(\mu + \sigma Z), \quad \text{ja} \quad Z \sim N(0, 1).$$

a) Johda X :n tf.

b) Johda lauseke kaikille momenteille $EX^r, r > 0$. (Opastus: $M_Z(t) = \exp(t^2/2)$).

c) Laske $\text{var } X$.

(Lognormaalijakauma on sikäli erikoinen jakuma, että sen kaikki momentit ovat olemassa, mutta silti sen momenttiemäfunktio ei ole olemassa missään origon ympäristössä.)

6. Lisätehtävä, josta saa ylimääräisen harjoitusrastin. Olkoon $Z = X+Y$, jossa $X \sim U(-1/2, 1/2)$, $Y \sim U(-1/2, 1/2)$ ja $X \perp Y$. Johda momentit $EZ^k, k = 1, 2, \dots, 6$ jommalla kummalla seuraavista tavoista.

a) Kehitä binomikaavalla $(X+Y)^k$ ja sovelta odotusarvon lineaarisuutta.

b) Johda Z :n momenttiemäfunktio ja kehitä se potenssisarjaksi.