Todennäköisyyslaskennan kurssi, 4. harjoitus (7.–8.10.2009)

1. Olkoon $X \sim \mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$. Johda sm:n $Y = \tan X$ tiheysfunktio.

2. Olkoon $X \sim \mathrm{U}(-1, 2)$. Johda sm:n $Y = X^2$ tiheysfunktio, ja hahmottele sen kuvaaja.

3. Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, jossa $n \geq 1$ ja $0 \leq p \leq 1$. Aluksi kertaa, miten luennoissa johdetaan tulos $EX = np$. Ratkaise sitten seuraavat kohdat.

a) Johda summaamalla yksinkertainen kaava odotusarvolle $E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) f_X(x)$.

b) Päättele edellisen kaavan ja odotusarvon lineaarisuuden avulla, mitä on EX^2.

c) Tarkista laskusi seuraavien tietojen avulla. Tunnetusti binomijakaumalle $\operatorname{var} X = np(1-p)$. Toisaalta tiedetään, että aina $\operatorname{var} X = E(X^2) - (EX)^2$.

4. Olkoon $X \sim \mathrm{Poi}(\mu)$, jossa $\mu > 0$. Poissonin jakauma ptnf:n löydät jaksosta 2.4. Muistathan eksponenttifunktion sarjakehitelmän,

$$\mathrm{e}^t = \exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \qquad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$

a) Johda summaamalla kaava odotusarvolle $EX = \sum_{x=0}^{\infty} x\, f_X(x)$.

b) Johda summaamalla kaava odotusarvolle $E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, f_X(x)$.

c) Tarkista laskusi vertaamalla niitä Poissonin jakaumaa koskeviin tunnettuihin tuloksiin,

$$EX = \operatorname{var} X = \mu.$$

5. Olkoon $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, jossa $\lambda > 0$. Eksponenttijakauman tiheysfunktion löydät jaksosta 2.6. Johda integroimalla yksinkertaiset kaavat odotusarvoille

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x, \quad \text{ja} \quad EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Osittaisintegroinnista on hyötyä. (Myös eksponenttijakauman odotusarvon ja varianssin kaavat löytyvät kirjallisuudesta, esim. luentomonisteesta, joten voit itse tarkistaa, oletko johtanut oikeat tulokset.)