Todennäköisyyslaskennan kurssi, 3. harjoitus (30.9.–1.10.2009)

1. Olkoon $P(C) > 0$. Todista ehdollisen tn:n $P(\cdot \mid C)$ äärellinen additiivisuus, eli että jos A ja B ovat erillisiä tapahtumia, niin $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$.

2. Mitkä seuraavista funktioista F_1, F_2, F_3, F_4 ovat kertymäfunktioita? Mitkä niistä ovat diskreetin jakauman ja mitkä jatkuvan jakauman kertymäfunktioita? Johda diskreettien jakaumien kohdalla vastaava pistetodennäköisyysfunktio, ja jatkuvien jakaumien kohdalla vastaava tiheysfunktio.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 1/4 & \text{kun } 0 \le x < 1/4, \\ 3/4 & \text{kun } 1/4 \le x < 3/4, \\ 1 & \text{kun } x \ge 3/4, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x/2 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 4x^3 - 6x^2 + 3x & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases} \qquad F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 6x^3 - 9x^2 + 4x & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1. \end{cases}$$

Opastus: jos kf on jatkuva, ja se on derivoituva muualla paitsi äärellisessä määrässä pisteitä, ja derivaatta on jatkuva muualla paitsi näissä poikkeuspisteissä, niin tämä kf on jatkuvan jakauman kf ja vastaava tf saadaan sen derivaattana.

3. Ns. potenssijakauma (engl. *power distribution*) parametrilla $\alpha > 0$ on jatkuva jakauma, jonka tf on $f(x) = c \cdot h(x)$, jossa normalisoimaton tiheysfunktio h on

$$h(x) = x^{\alpha - 1}, \quad \text{kun } 0 < x < 1,$$

ja nolla muualla.

a) Laske normalisointivakion c arvo, b) johda jakauman kertymäfunktio, c) johda jakauman kvantiilifunktio, d) selitä miten tätä jakaumaa noudattava sm voidaan simuloida, kun osataan simuloida $U \sim \mathrm{U}(0,1)$.

4. (Kriittisiä pisteitä kvantiilifunktion avulla.) Olkoon Y jatkuvasti jakautunut sm, joka toteuttaa jakson 2.7 alussa mainitut oletukset, jolloin sen kvantiilifunktio saadaan johtamalla kertymäfunktion tavanomainen käänteisfunktio. Oletetaan lisäksi, että Y:n kvantiilifunktion q arvot osataan laskea.

Annettuna on luku $0 < \alpha < 1$. Pisteet y, y_1 ja y_2 määritellään ehdoilla

$$P(Y > y) = \alpha, \quad P(Y < y_1) = P(Y > y_2) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Ts. pisteet pitää määrätä siten, että $P(Y \le y) = P(y_1 \le Y \le y_2) = 1 - \alpha$ ja jälkimmäisessä tapauksessa vaaditaan lisäksi, että molemmissa häntäaluieissa on oltava yhtä suuri todennäköisyysmassa.

a) Ilmaise pisteet y, y_1 ja y_2 kvantiilifunktion avulla.

b) Mikä yhteys on pisteiden y_1 ja y_2 välillä, jos Y:n jakauma on symmetrinen eli sen tiheysfunktio toteuttaa ehdon $f(-y) = f(y)$ kaikilla y?

5. Olkoon $X > 0$ jatkuvasti jakautunut sm ja määritellään $Y = X^4$. Oletetaan, että X:n tf $f_X(x)$ on jatkuva, kun $x > 0$. Johda Y:n kf F_Y. Laske seuraavaksi derivaatta $g = F_Y'$ ja tarkista, että

$$F_Y(y) = \int_0^y g(u)\,\mathrm{d}u, \qquad \text{kaikilla } y > 0.$$

Tällöin olet tullut tarkistaneeksi, että Y:n tf on g (koska kertymäfunktio määrää jakauman).