Todennäköisyyslaskennan kurssi, 10. harjoitus (9.–10.12.2009)

1. Olkoon y_i kaupungissa i tietyn vuoden aikana tiettyyn sairauteen kuolleiden henkilöiden lukumäärä, ja olkoon x_i kyseisen kaupungin asukasluku, kun $i = 1, \dots, n$. Tässä tehtävässä käytämme mallia, jonka mukaan y_i:t ovat riippumattomien Poissonin jakaumia noudattavien satunnaismuuttujien Y_i havaittuja arvoja, joiden jakauma on

$$Y_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda\, x_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Parametri λ on kyseisestä taudista aiheutuva kuolleisuus henkilövuotta kohti.

Kirjoita uskottavuusfunktio sekä etsi parametrin suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\lambda}^{\mathrm{ML}}$.

2. Käsittelemme nyt edellisen tehtävän Bayes-versiota. Parametri $\Lambda > 0$ on jatkuvasti jakautunut satunnaismuuttuja. Ehdolla Λ sm:t $Y_1, \dots, Y_n$ ovat ehdollisesti riippumattomia, ja

$$[Y_i \mid \Lambda = \lambda] \sim \mathrm{Poi}(\lambda\, x_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Parametrin Λ priorijakauma on $\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$, jossa $\alpha, \beta > 0$ ovat vakioita.

Johda posteriorijakauma $[\Lambda \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$, jossa $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ on havaintoja vastaava satunnaisvektori ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, jossa luvut $y_i \geq 0$ ovat havaittuja lukumääriä.

3. Tietyssä populaatiossa satunnaisesti valitun miehen iälle A (vuosia), pituudelle L (cm) ja painolle W (kg) käytetään tässä tehtävässä mallina kolmiulotteista normaalijakaumaa siten, että sv:n $\mathbf{V} = (A, L, W)$ odotusarvo $\boldsymbol{\mu}$ ja kovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Sigma}$ ovat

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 40 \\ 173 \\ 75 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 256 & 0 & 58 \\ 0 & 103 & 74 \\ 58 & 74 & 82 \end{bmatrix}$$

a) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a)$. Mikä on 21 vuotta vanhojen miesten painon jakauma?

b) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a, L = l)$. Mikä on 21 vuotta vanhojen ja 191 cm pitkien miesten painon jakauma?

4. Olkoon $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$, jossa $\boldsymbol{\Sigma}$ on positiivisesti definiitti matriisi. Tällöin satunnaismuuttujalla $Y = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ on eräs tuttu jakauma. Mikä?

Opastus: käytä hajotelmaa $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on $n \times n$-matriisi.

5. (Lineaarisen sekamallin uskottavuusfunktio.) Tarkastellaan mallia

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{U} + \boldsymbol{\epsilon},$$

jossa $\mathbf{X}$ on tunettu deterministinen $n \times p$-matriisi, $\mathbf{Z}$ on tunnettu deterministinen $n \times k$-matriisi ja $\boldsymbol{\beta}$ on tuntematon deterministinen vektori. $\mathbf{U}$ ja $\boldsymbol{\epsilon}$ ovat riippumattomia satunnaisvektoreita siten, että $\mathbf{U} \sim N_k(\mathbf{0}, \sigma_d^2 \mathbf{D})$, ja $\boldsymbol{\epsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I})$, missä $\mathbf{D}$ on tunnettu positiivisesti definiitti $k \times k$-matriisi. Parametrivektori on $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma_d^2, \sigma_e^2)$, jossa $\sigma_d^2 \geq 0$ ja $\sigma_e^2 > 0$. Satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ arvo $\mathbf{y}$ havaitaan, mutta satunnaisvektorien $\mathbf{U}$ tai $\boldsymbol{\epsilon}$ arvoja ei havaita. Tässä mallissa satunnaismuuttujat $U_1, \dots, U_k$ ovat ns. latentteja muuttujia eli piilomuuttujia. (Virhevektori $\boldsymbol{\epsilon}$ on myös latentti, mutta sen rooli on lähinnä spesifoida $\mathbf{Y}$:n ehdollinen jakauma ehdolla $\mathbf{U}$.)

Tällaisen mallin uskottavuusfunktio on $\boldsymbol{\theta} \mapsto f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$, jossa $f(\cdot \mid \boldsymbol{\theta})$ on sv:n $\mathbf{Y}$ reunajakauman tiheys, kun parametrien arvot on $\boldsymbol{\theta}$. Kirjoita eksplisiittinen lauseke uskottavuusfunktiolle.

Opastus: sv:lla $(\mathbf{U}, \epsilon)$ on tietty multinormaalijakauma, minkä ansiosta sv:lla $\mathbf{Y}$ on myös multinormaalijakauma, joten uskottavuusfunktion saa kirjoitettua multinormaalijakauman tiheysfunktion kaavan (9.12) avulla. (Jos mallissa on latentteja muuttujia, niin tyypillisesti käy toisin eli niin, että uskottavuusfunktio voidaan kirjoittaa ainoastaan tulona integraaleja, jotka eivät sievene.)

6. (Lisätehtävä, josta saa ylimääräisen laskuharjoituspisteen.) Tässä tehtävässä tarkistetaan lauseen 9.6 todistuksen jälkeen mainittu yleistys. Olkoon $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{V}\end{bmatrix}$ ortogonaalinen $n \times n$-matriisi, joka on ositettu siten, että $\mathbf{U}$ on $n \times p$-matriisi ja $\mathbf{V}$ on $n \times (n-p)$-matriisi. Määritellään $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$. Olkoon $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, jossa $\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{m}$.

a) Tarkista, että $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_p$, ja $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_{n-p}$, ja $\mathbf{I}_n = \mathbf{U}\mathbf{U}^T + \mathbf{V}\mathbf{V}^T$ ja että $\mathbf{V}^T\mathbf{m} = \mathbf{0}$. (Hyödynnä ortogonaalisuudesta saatavaa kaavaa $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ sekä matriisin $\mathbf{Q}$ ositusta.)

b) Tarkista, että $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$ ja että $\mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{H}$ eli että $\mathbf{H}$ on symmetrinen ja idempotentti. Tarkista tämän jälkeen, että $\mathbf{H}\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X}$.

c) Tarkista, että $1/\sigma^2 \|(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X}\|^2 \sim \chi^2_{n-p}$. (Tulos seuraa helposti, kun ensin osoitat, että $\|(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X}\|^2 = \|\mathbf{V}^T\mathbf{X}\|^2$.)