

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 1. harjoitus (16.–17.9.2009)

1. Olkoot A ja B tapahtumia. Todista a- ja b-kohtien kaavat käyttämällä tnm-
mitan (äärellistä) additiivisuutta. Tarkista ko. ositusten tapahtumien erillisuus
piirtämällä Vennin diagrammit.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$,

b) $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$.

c) Näytä lopuksi, että *yhteenlaskukaava* on voimassa, eli että
 $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

2. Olkoot A ja B tapahtumia. Todista yhteenlaskukaavaa käyttämällä *Booleen
epäyhtälö*, jonka mukaan

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Todista vielä *Bonferronin epäyhtälö*, jonka mukaan

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

3. Olkoon $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$ ja $P(A \cap B) = 0.1$. Laske seuraavien
tapahtumien todennäköisyydet,

a) A^c b) $A \cup B$ c) $A^c \cup B^c$ d) $A \setminus B$

4. Olympiavoittaja Matti Nykänen tokaisi eräässä yhteydessä, että *se on ihan
fifty-sixty miten tässä käy*. Usein tätä pidetään osoituksena siitä, että urhei-
lusankarimme ei välitä aritmetiikan säännöistä. Tällainen arvostelu paljastaa
kuitenkin sen, että arvostelija ei itse tiedä, että tutussa sanonnassa *fifty-fifty* on
kyse ns. vedonlyöntisuhteen ilmoittamisesta.

Olkoon tietyn tapahtuman A tn $0 < p < 1$. Tällöin vedonlyöntisuhde (A :n
tapahtumisen puolesta), engl. *odds*, määritellään kaavalla

$$o = \frac{p}{1-p}.$$

a) Ratkaise p , kun vedonlyöntisuhde o tunnetaan.

b) Mitä todennäköisyyttä vastaa vedonlyöntisuhde 50/50, engl. *fifty-fifty*?

c) Mitä todennäköisyyttä vastaa vedonlyöntisuhde 50/60, engl. *fifty-sixty*?

5. Olkoot A ja B sellaisia tapahtumia, että $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (ts. A ja
 B ovat *riippumattomia*). Osoita, että

a) $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$ (ts. A ja B^c ovat riippumattomia). (Vaihtamalla
 A :n ja B :n roolit nähdään saman tien, että A^c ja B ovat myös riippumatto-
mia.)

b) $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ (ts. A^c ja B^c ovat riippumattomia). Vihe: siirry
komplementteihin de Morganin lain avulla ja käytä yhteenlaskukaavaa.

Tehtävien ratkaisuista saat **lisäpisteitä** kurssikokeita varten seuraavan säännön
mukaan: saat 1, 2, 3, 4, 5, 6 tai 7 pistettä, jos ratkaiset vastaavasti vähintään
20, 30, 40, 50, 60, 70 tai 80 prosenttia kurssin aikana annetuista tehtävistä.