(1) Olkoon $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = ze^x + z^3(1+y^2) - c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio. Tällöin tehtävän yhtälö saa muodon $F(x,y,z)=0$. Koska F on jatkuvasti derivoituva ja

$$D_3 F(x_0,y_0,z_0) = e^{x_0} + 3z_0^2(1+y_0^2) \neq 0 \quad \forall (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3,$$

määrittelee yhtälö $F(x,y,z)=0$ Lauseen 3.48 mukaan jokaisen pisteen (x_0,y_0,z_0), jolla $F(x_0,y_0,z_0)=0$, eräässä ympäristössä jatkuvasti derivoituvan funktion $z(x,y)$. Niinpä derivoimalla yhtälö

$$z(x,y)e^x + (z(x,y))^3(1+y^2) = c \quad (1)$$

puolittain x:n suhteen saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)e^x + z(x,y)e^x + 3(z(x,y))^2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)(1+y^2) = 0 \iff$$

$$\left(e^x + 3(z(x,y))^2(1+y^2)\right)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -z(x,y)e^x \iff$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{z(x,y)e^x}{e^x + 3(z(x,y))^2(1+y^2)}$$

(huomaa, ettei nimittäjällä ole nollakohtia). Vastaavasti, derivoimalla yhtälö (1) puolittain y:n suhteen saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)e^x + 3(z(x,y))^2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)(1+y^2) + (z(x,y))^3 2y = 0 \iff$$

$$\left(e^x + 3(z(x,y))^2(1+y^2)\right)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -(z(x,y))^3 2y \iff$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{(z(x,y))^3 2y}{e^x + 3(z(x,y))^2(1+y^2)}$$

(huomaa taaskin, ettei nimittäjällä ole nollakohtia).

TAPAUS $C=0$ UNOHTUI. SE LÖYTYY SIVULTA 5.

(2) (a) $Q(x,y,z) = 3xy - x^2 + 2z^2$.

Tapa 1. Koska $Q(1,0,0) = -1 < 0$ ja $Q(0,0,1) = 2 > 0$, Q on indefiniitti.

Tapa 2. Neliömuotoa Q vastaava symmetrinen matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nyt $d_1 = -1 < 0$ (d_i on määritelty Lauseessa 3.55), joten A ei ole

Positiivisesti semidefiniitti Lauseen 3.55(iii) mukaan. Toisaalta jättämällä matriisista $-A$ pois 1. ja 2. rivi ja sareke on saadun 1×1-matriisin determinantti $-2<0$. Siis A ei ole myöskään negatiivisesti semidefiniitti Lauseen 3.55(iv) mukaan. Niinpä A ja Q ovat indefiniittejä.

(b) $Q(x,y) = 5x^2+4xy+8y^2$.

<u>Tapa 1.</u> Neliöksi täydentämällä saadaan

$$5x^2+4xy+8y^2 = 5\left(x^2+\tfrac{4}{5}xy+\tfrac{8}{5}y^2\right) = 5\left(\left(x+\tfrac{2}{5}y\right)^2-\left(\tfrac{2}{5}y\right)^2+\tfrac{8}{5}y^2\right)$$
$$= 5\left(\underbrace{\left(x+\tfrac{2}{5}y\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\tfrac{36}{25}y^2}_{\geq 0}\right) \geq 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

ja tässä pätee yhtäsuuruus vain kun $y=0$ ja $x=0$. Siis Q on positiivisesti definiitti.

<u>Tapa 2.</u> Neliömuotoa Q vastaavalle symmetriselle matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

pätee $d_1=5>0$ ja $d_2=\det A = 5\cdot 8-2\cdot 2=36>0$. Niinpä Lauseen 3.55(i) perusteella A ja Q ovat positiivisesti definiittejä.

(c) $Q(x,y) = 4x^2+4xy+y^2$

<u>Tapa 1.</u> Neliöksi täydentämällä saadaan

$$4x^2+4xy+y^2 = 4\left(x^2+xy+\tfrac{1}{4}y^2\right) = 4\left(\left(x+\tfrac{1}{2}y\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}y\right)^2+\tfrac{1}{4}y^2\right)$$
$$= 4\left(x+\tfrac{1}{2}y\right)^2 \geq 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lisäksi tästä nähdään, että esimerksi $Q(1,-2)=0$. Siis Q on positiivisesti semidefiniitti.

<u>Tapa 2.</u> Neliömuotoa Q vastaavalle symmetriselle matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

pätee $d_2=\det A = 4\cdot 1-2\cdot 2=0$, joten A ja Q eivät ole positiivisesti definiittejä Lauseen 3.55(i) perusteella. Toisaalta nyt $d_1=4\geq 0$, $d_2=\det A = 4\cdot 1-2\cdot 2 = 0\geq 0$ ja $\det[1]=1\geq 0$ ($[1]$ on 1×1-matriisi, joka saadaan, kun A:sta poistetaan 1. rivi ja sarake). Siis Lauseen 3.55(iii) perusteella A ja Q ovat positiivisesti semidefiniittejä.

(3) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$. Funktion f määrittelyjoukko $\mathbb{R}^n$ on konveksi, sillä kun $x, y \in \mathbb{R}^n$, niin tietenkin $(1-t)x + ty \in \mathbb{R}^n$ kaikilla $t \in [0,1]$. Lisäksi normin perusominaisuuksien nojalla (katso Lause 3.2 (ii) ja (iii))

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = \|(1-t)x_1 + tx_2\| \le \|(1-t)x_1\| + \|tx_2\|$$
$$= |(1-t)|\|x_1\| + |t|\|x_2\| = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ja kaikille $t \in]0,1[$. Siis funktio f on konveksi.

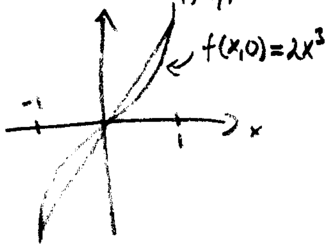
(4) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 5xy$

Tapa 1. Jos f on konveksi (konkaavi) $\mathbb{R}^2$:ssa, niin se on konveksi (konkaavi) jokaisessa konveksissa joukossa $S \subset \mathbb{R}^2$ (tämä seuraa välittömästi määritelmistä). Valitaan nyt $S = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Tällöin saadaan lausekkeen $2x^3$ määrittelemä yhden muuttujan funktio. Sen konveksisuuden (konkaavisuuden) selvittämiseen voidaan käyttää syksyn kurssin tietoja. Seuraavassa nojaudutaan kuitenkin pelkästään tämän kurssin määritelmiin.

Olkoot $(x_1,y_1) = (-1,0)$, $(x_2,y_2) = (0,0)$ ja $t = 1/2$. Nyt

$$f((1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2)) = f(-\tfrac{1}{2},0) = 2(-\tfrac{1}{2})^3 = -\tfrac{1}{4} \text{ ja}$$
$$(1-t)f(x_1,y_1) + tf(x_2,y_2) = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1)^3 = -1.$$

Koska $-1/4 \not\le -1$, f ei ole konveksi $\mathbb{R}^2$:ssa. Toisaalta, olkoot $(x_1,y_1) = (0,0)$, $(x_2,y_2) = (1,0)$ ja $t = 1/2$. Nyt



$$f((1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2)) = f(\tfrac{1}{2},0) = 2(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{4} \text{ ja}$$
$$(1-t)f(x_1,y_1) + tf(x_2,y_2) = \tfrac{1}{2}f(1,0) = 1,$$

koska $1/4 \not\ge 1$, f ei ole konkaava $\mathbb{R}^2$.

Tapa 2. Koska $\mathbb{R}^2$ on avoin ja konveksi sekä $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, voidaan soveltaa Lausetta 4.12. Funktion f Hessen matriisi on

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x & -5 \\ -5 & 6y \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix},$$

jolloin $d_1 = 12 > 0$ ja $d_2 = \det H(1,1) = 12\cdot 6 - (-5)^2 = 47 > 0$ ja Lauseen 3.55 (i) perusteella $H(1,1)$ on positiivisesti definiitti. Kuten tehtävässä 6 seuraa tästä, että pisteellä $(1,1)$ on kiekkoympäristö, jossa $H(x,y)$ on positiivisesti definiitti. Niinpä Lauseen 4.12 (ii) perusteella pisteellä $(1,1)$ on kiekkoympäristö, jossa f on vahvasti konveksi.

Toisaalta

$$-H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

jolloin $d_1 = 12$ ja $d_2 = \det(-H(-1,-1)) = 12 \cdot 6 - 5^2 = 47 > 0$ ja Lauseen 3.55 (ii) perusteella $H(-1,-1)$ on negatiivisesti definiitti. Taaskin, kuten tehtävässä 6 seuraa tästä, että pisteellä $(-1,-1)$ on kiekkoympäristö, jossa $H(x,y)$ on negatiivisesti definiitti. Niinpä Lauseen 4.12 (iv) perusteella pisteellä $(-1,-1)$ on kiekkoympäristö, jossa f on vahvasti konkaavi.

Edellä olevien havaintojen perusteella f ei ole konveksi eikä konkaavi $\mathbb{R}^2$:ssa.

(5) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 7x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 2xy - 2yz - 4xz$. Koska $\mathbb{R}^3$ on avoin ja konveksi sekä $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, voidaan soveltaa Lausetta 4.12. Funktion f Hessen matriisi on

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 14 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin johtavat alideterminantit

$$d_1 = 14, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 14 \cdot 8 - (-2)^2 = 108 \text{ ja } d_3 = \begin{vmatrix} 14 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 14(112-4) + 2(-28-8)$$

$$-4(4+32) = 1296$$

ovat positiivisia kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, joten $H(x,y,z) > 0$ (eli $H(x,y,z)$ on positiivisesti definiitti) kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ Lauseen 3.55 (i) perusteella. Niinpä Lauseen 4.12 (i) mukaan f on vahvasti konveksi $\mathbb{R}^3$:ssa.

(6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$. Koska $\mathbb{R}^2$ on avoin, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ja kiekkoympäristöt ovat konvekseja (tämä osoitetaan ratkaisun lopussa), voidaan soveltaa Lausetta 4.12. Funktion f Hessen matriisi on

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Havaitaan, että $H(1,1)$:n johtavat alideterminantit $d_1 = 6$ ja $d_2 = \det H(1,1) = 6^2 - 1^2 = 35$ ovat positiivisia. Koska determinantit ovat jatkuvia kuvauksia,

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ja jatkuvista kuvauksista yhdistämällä saatu kuvaus on jatkuva, $H(x,y)$:n (johtavat) alideterminantit ovat jatkuvia. Siksi $H(x,y)$:n johtavat alideterminantit ovat positiivisia pisteen $(1,1)$ kullin pienessä kiekkoympäristössä $B_\delta(1,1)$:ssä. Niinpä Lauseen 3.55(i) mukaan $H(x,y) > 0$ kaikilla $(x,y) \in B_\delta(1,1)$, ja edelleen Lauseen 4.12(ii) mukaan f on vahvasti konveksi $B_\delta(1,1)$:ssä.

Osoitetaan vielä, että $\mathbb{R}^n$:n, $n \in \{1,2,\dots\}$, kuulaympäristöt (kun $n=2$ niitä sanotaan myös kiekkoympäristöiksi) ovat konvekseja. Olkoot $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $r>0$. Kun $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B_r(\bar{x}_0)$, niin $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| < r$ ja $\|\bar{x}_2 - \bar{x}_0\| < r$. Olkoon $t \in [0,1]$. Normin perusominaisuuksien (katso Lause 3.2 (ii) ja (iii)) perusteella

$$\begin{aligned}
&\|(1-t)\bar{x}_1 + t\bar{x}_2 - \bar{x}_0\| = \|(1-t)(\bar{x}_1-\bar{x}_0) + t(\bar{x}_2-\bar{x}_0)\| \\
&\le \|(1-t)(\bar{x}_1-\bar{x}_0)\| + \|t(\bar{x}_2-\bar{x}_0)\| \\
&= |1-t|\,\|\bar{x}_1-\bar{x}_0\| + |t|\,\|\bar{x}_2-\bar{x}_0\| \\
&< (1-t)r + tr = r.
\end{aligned}$$

Siis $(1-t)\bar{x}_1 + t\bar{x}_2 \in B_r(\bar{x}_0)$ kaikilla $t \in [0,1]$.

Täydennystä tehtävän 1 ratkaisuun. Kun $c=0$, niin

$$z(x,y)\left(e^x + (z(x,y))^2(1+y^2)\right) = 0.$$

Koska $e^x + (z(x,y))^2(1+y^2) > 0$, niin $z(x,y)=0$ kaikilla $(x,y) \in U$, missä $U \subset \mathbb{R}^2$ on sopivasti valittu avoin joukko. Tällöin myös $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$ kaikilla $(x,y) \in U$.