① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3y^2 + 7xy^3 + xy^2 - 3xy$.

$$D_1 f(x,y) = 3x^2y^2 + 7y^3 + y^2 - 3y,$$
$$D_{11} f(x,y) = 6xy^2,$$
$$D_{12} f(x,y) = 6x^2y + 21y^2 + 2y - 3,$$
$$D_2 f(x,y) = 2x^3y + 21xy^2 + 2xy - 3x,$$
$$D_{21} f(x,y) = D_{12} f(x,y) \quad \text{ja}$$
$$D_{22} f(x,y) = 2x^3 + 42xy + 2x.$$

Siten f:n Hessen matriisiksi saadaan

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} D_{11} f(x,y) & D_{12} f(x,y) \\ D_{21} f(x,y) & D_{22} f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy^2 & 6x^2y + 21y^2 + 2y - 3 \\ 6x^2y + 21y^2 + 2y - 3 & 2x^3 + 42xy + 2x \end{bmatrix},$$

$$H(1,-1) = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & -38 \end{bmatrix},$$

joten f:n Hessen determinantti pisteessä $(1,-1)$ on

$$\det H(1,-1) = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 10 & -38 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-38) - 10 \cdot 10 = \underline{\underline{-328.}}$$

② Koska f on jatkuvasti derivoituva, se on differentioituva (Lause 3.38). Lauseen 3.37 mukaan f:n differentiaalikehitelmä pisteessä (x_0, y_0) on

$$f((x_0,y_0) + (h_1,h_2)) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (h_1,h_2)$$
$$+ \|(h_1,h_2)\| \, \varepsilon(h_1,h_2),$$

missä $\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$ $\left(\|(h_1,h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$.
Nyt

$$\nabla f(x,y) = (D_1 f(x,y), D_2 f(x,y))$$
$$= (3x^2y^2 + 7y^3 + y^2 - 3y, \; 2x^3y + 21xy^2 + 2xy - 3x),$$

Joten $\nabla f(1,-1) = (0,14)$. Niinpä funktion f kokonaisdifferentiaali pisteessä $(1,-1)$ on

$$\nabla f(1,-1)\cdot(h_1,h_2) = (0,14)\cdot(h_1,h_2) = \underline{\underline{14h_2}}$$

Ja osittaisdifferentiaalit ovat

$$D_1 f(1,-1)h_1 = 0h_1 = \underline{\underline{0}} \text{ ja}$$
$$D_2 f(1,-1)h_2 = \underline{\underline{14h_2}}.$$

Differentioituva funktio vähenee nopeiten gradienttinsa suuntaa vastakkaiseen suuntaan (monisteen sivut 121–122), siis tehtävän funktio vähenee nopeiten pisteessä $(1,-1)$ suuntaan $-\nabla f(1,-1) = \underline{\underline{(0,-14)}}$.

(3) Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2y^2 + z^2 + y$. Tehtävän pinta on siis yhtälön $f(x,y,z) = 7$ määräämä. Nyt

$$\nabla f(x,y,z) = (2xy^2,\ 2x^2y+1,\ 2z) \text{ ja}$$
$$\nabla f(1,2,-1) = (8,5,-2) \quad (\neq \bar{0}).$$

Koska $f(1,2,-1) = 7$, piste $(1,2,-1)$ kuuluu tarkasteltavaan pintaan. Tangenttitaso pisteessä $(1,2,-1)$ on

$$\nabla f(1,2,-1)\cdot(x-1,\ y-2,\ z-(-1)) = 0 \iff$$
$$(8,5,-2)\cdot(x-1,\ y-2,\ z+1) = 0 \iff$$
$$8x - 8 + 5y - 10 - 2z - 2 = 0 \iff$$
$$\underline{\underline{8x + 5y - 2z = 20.}}$$

(4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{2x+y}$, ja $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (xy, x^2)$.

Lasketaan ensin kuvauksen $f \circ g$ osittaisderivaatat ketjusäännön avulla. Tällöin tarvitaan seuraavia osittaisderivaattoja:

$$D_1 f(x,y) = 2e^{2x+y}, \qquad D_2 f(x,y) = e^{2x+y},$$

$$D_1 g_1(x,y) = y, \qquad D_2 g_1(x,y) = x,$$

$$D_1 g_2(x,y) = 2x, \quad \text{ja} \quad D_2 g_2(x,y) = 0.$$

Ketjusäännön mukaan:

$$D_1(f \circ g)(x,y) = D_1 f(g(x,y))\, D_1 g_1(x,y) + D_2 f(g(x,y))\, D_1 g_2(x,y)$$
$$= 2e^{2g_1(x,y) + g_2(x,y)}\, y + e^{2g_1(x,y) + g_2(x,y)}\, 2x$$
$$= \underline{\underline{2(y+x)\, e^{2xy + x^2}}} \quad \text{ja}$$

$$D_2(f \circ g)(x,y) = D_1 f(g(x,y))\, D_2 g_1(x,y) + D_2 f(g(x,y))\, D_2 g_2(x,y)$$
$$= 2e^{2g_1(x,y) + g_2(x,y)}\, x + e^{2g_1(x,y) + g_2(x,y)}\, 0$$
$$= \underline{\underline{2x\, e^{2xy + x^2}}}.$$

Lasketaan vielä nämä osittaisderivaatat muodostamalla ensin kuvauksen $f \circ g$ lauseke:

$$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$$
$$= e^{2g_1(x,y) + g_2(x,y)} = e^{2xy + x^2}.$$

Siten

$$D_1(f \circ g)(x,y) = \underline{\underline{2(y+x)\, e^{2xy+x^2}}} \quad \text{ja}$$
$$D_2(f \circ g)(x,y) = \underline{\underline{2x\, e^{2xy+x^2}}}.$$

Kuvaus $f\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on differentioituva, koska se on jatkuvasti derivoituva (Lause 3.38). Siksi Lauseen 3.40 mukaan sen derivaatalle vektorin $(2,3)$ suuntaan pisteessä $(0,1)$ pätee:

$$D_{(2,3)}(f\circ g)(0,1) = \big(D_1(f\circ g)(0,1),\ D_2(f\circ g)(0,1)\big)\cdot \frac{(2,3)}{\|(2,3)\|}$$

$$= (2,0)\cdot\frac{(2,3)}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\cdot 2 + 0\cdot 3) = \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{13}}}}.$$

5 Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 16$. Tällöin tehtävän ellipsin yhtälö on $F(x,y) = 0$. $D_1F(x,y) = 6x$ ja $D_2F(x,y) = 8y$ ovat jatkuvia, joten F on jatkuvasti derivoituva. Lisäksi $F(2,1) = 0$ ja $D_2F(2,1) = 8 \neq 0$, joten Lauseen 3.48 perusteella on olemassa suorakaide

$$S = [2-\delta_1, 2+\delta_1] \times [1-\delta, 1+\delta] \quad (\delta_1 > 0,\ \delta > 0),$$

missä yhtälö $F(x,y) = 0$ määrittelee y:n x:n funktiona, ts. jokaiselle $x \in [2-\delta_1, 2+\delta_1]$ on olemassa täsmälleen yksi $y \in [1-\delta, 1+\delta]$, jolla $F(x,y) = 0$. Lisäksi näin saatu funktio, ns. implisiittifunktio, $f : [2-\delta_1, 2+\delta_1] \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva ja

$$Df(x) = -\frac{D_1F(x,f(x))}{D_2F(x,f(x))} \quad \forall x \in [1-\delta_1, 1+\delta_1]. \quad (1)$$

Implisiittifunktion f yhteydessä merkitään yleensä $y(x) = f(x)$.

Implisiittifunktion $y(x)$ derivaatta voidaan laskea kaavasta (1). Toinen tapa sen laskemiseksi on käyttää seuraavaa ns. implisiittistä derivointia. Edellä todetun perusteella pisteen $(1,2)$ eräässä ympäristössä yhtälö $F(x,y) = 0$ määrittelee derivoituvan funktion $y(x)$. Tällöin

$$3x^2 + 4(y(x))^2 - 16 = 0$$

ja derivoimalla tämän yhtälön molemmat puolet saadaan

$$6x + 8\,y(x)\,y'(x) = 0.$$

Sijoittamalla tähän $x = 2$ ja $y(2) = 1$ saadaan

$$12 + 8y'(2) = 0 \iff y'(2) = -\tfrac{3}{2}.$$

Niinpä pisteeseen $(2,1)$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$y - 1 = y'(2)(x-2) \iff y - 1 = -\tfrac{3}{2}(x-2) \iff$$

$$\underline{\underline{y = -\tfrac{3}{2}x + 4.}}$$

Esitetään vielä vaihtoehtoinen tapa johtaa tangentin yhtälö. Nyt $\nabla F(x,y) = (6x, 8y)$ ja $\nabla F(2,1) = (12,8)$. $\nabla F(2,1)$ on pisteessä $(2,1)$ kohtisuorassa tasa-arvopintaa $F(x,y) = 0$ vastaan eli se on kohtisuorassa tasa-arvopinnan $F(x,y)=0$ pisteeseen $(2,1)$ piirrettyä tangenttia vastaan. Niinpä piste (x,y) kuuluu tähän tangenttiin joss $(x,y)-(2,1)$ on kohtisuorassa vektoria $\nabla F(2,1)$ vastaan eli

$$((x,y) - (2,1)) \cdot \nabla F(2,1) = 0 \iff$$

$$((x,y) - (2,1)) \cdot (12,8) = 0 \iff$$

$$12x + 8y - 24 - 8 = 0 \iff$$

$$\underline{\underline{y = -\tfrac{3}{2}x + 4.}}$$

⑥ Olkoon $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 9$, jolloin tehtävän ellipsoidin yhtälö on $F(x,y,z) = 0$. Nyt

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 4y, 6z).$$

$\nabla F(2,1,1)$ on pisteessä $(2,1,1)$ kohtisuorassa tasa-arvopintaa $F(x,y,z) = 0$ vastaan eli se on kohtisuorassa tasa-arvopinnan pisteeseen $(2,1,1)$ piirrettyä tangenttitasoa vastaan. Niinpä piste (x,y,z) kuuluu tähän tangenttitasoon joss $(x,y,z) - (2,1,1)$ on kohtisuorassa vektoria $\nabla F(2,1,1)$ $(\neq \bar{0})$ vastaan eli

$$((x,y,z) - (2,1,1)) \cdot \nabla F(2,1,1) = 0 \iff$$

$$((x,y,z) - (2,1,1)) \cdot (4,4,6) = 0 \iff$$

$$4x + 4y + 6z - 8 - 4 - 6 = 0 \iff$$

$$\underline{\underline{4x + 4y + 6z = 18.}}$$