(1) <u>Tapaus $y_0 \neq 0$.</u> Nyt voidaan rajoittua sellaisiin pisteen $(0, y_0)$ ympäristöihin, jotka eivät leikkaa x-akselia eli joissa $y \neq 0$. Kun $x \neq 0$ ja $y \neq 0$,

$$\frac{\sin(xy)}{x} = y\,\frac{\sin(xy)}{xy} = y\,\frac{\sin t}{t}, \qquad (1)$$

missä $t = xy$. Tällöin $t \neq 0$ ja $t \to 0$, kun $(x,y) \to (0, y_0)$. Koska lisäksi tiedetään (matemaattisen analyysin kurssi), että $\sin(t)/t \to 1$, kun $t \to 0$, niin $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \sin(xy)/x = y_0$.

<u>Tapaus $y_0 = 0$.</u> Kun $y = 0$, pätee

$$\frac{\sin(xy)}{x} = 0. \qquad (2)$$

Toisaalta, kun $y \neq 0$, voidaan kirjoittaa kuten kaavassa (1):

$$\frac{\sin(xy)}{x} = y\,\frac{\sin(xy)}{xy} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \cdot 1 = 0, \qquad (3)$$

Kohtien (2) ja (3) perusteella $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy)/x = 0$.

Edellä käsiteltyjen tapausten tulokset voidaan yhdistää: <u>$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \sin(xy)/x = y_0$</u> kaikille $y_0 \in \mathbb{R}$.

(2) Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaavan

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy)/x, & \text{kun } x \neq 0, \text{ ja} \\ y, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

määrittelemä. Osoitetaan ensin, että f on jatkuva, kun $x \neq 0$. Tällöin pätee: $f(x,y) = \sin(Pr_1(x,y) \cdot Pr_2(x,y)) / Pr_1(x,y)$.

(1) Projektiokuvaukset $Pr_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, ovat jatkuvia (moniste, s.105).

(2) $Pr_1(x,y) \cdot Pr_2(x,y)$ on jatkuva, sillä jatkuvien funktioiden tulo on jatkuva (Seuraus 3.16).

(3) $\sin(Pr_1(x,y) \cdot Pr_2(x,y))$ on jatkuva, sillä se on saatu yhdistettynä funktiona jatkuvista funktioista sin ja $Pr_1(x,y) \cdot Pr_2(x,y)$ (Lause 3.21).

(4) $\sin(Pr_1(x,y) \cdot Pr_2(x,y)) / Pr_1(x,y)$ on jatkuva, sillä jatkuvien funktioiden osamäärä on jatkuva (Seuraus 3.16)

Siis f on jatkuva joukossa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. Toisaalta tehtävän 1 ja edellä esitetyn määritelmän perusteella

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = y_0 = f(0,y_0).$$

Siis f on jatkuva myös pisteissä $(0,y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ (Lause 3.14). Niinpä f on jatkuva koko $\mathbb{R}^2$:ssa.

③ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{\ln(1+\sqrt{|x+y+z|})}{2+x^2} = \frac{\ln(1+\sqrt{|Pr_1(x,y,z)+Pr_2(x,y,z)+Pr_3(x,y,z)|})}{2+Pr_1(x,y,z)\cdot Pr_1(x,y,z)}.$$

Huomaa, että funktion f määritelmä on kunnossa, sillä $|x+y+z| \geq 0$, $1+|x+y+z| \geq 1$ ja $2+x^2 \neq 0$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(1) Projektiot $Pr_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3\}$, ovat jatkuvia (moniste, sivu 105). Luvut 1 ja 2 voidaan tulkita vakiofunktioiksi, jotka ovat jatkuvia.

(2) $Pr_1(x,y,z)+Pr_2(x,y,z)+Pr_3(x,y,z)$ on jatkuva, sillä jatkuvien funktioiden summa on jatkuva (Seuraus 3.16).

(3) $|Pr_1(x,y,z)+Pr_2(x,y,z)+Pr_3(x,y,z)|$ on jatkuva, sillä se on saatu yhdistettynä funktiona itseisarvosta ja kohdan (2) funktiosta, jotka ovat jatkuvia (Lause 3.21).

(4) $\sqrt{|Pr_1(x,y,z)+Pr_2(x,y,z)+Pr_3(x,y,z)|}$ on jatkuva, sillä se on saatu yhdistettynä funktiona neliöjuuresta ja kohdan (3) funktiosta, jotka ovat jatkuvia.

(5) $1+\sqrt{|Pr_1(x,y,z)+Pr_2(x,y,z)+Pr_3(x,y,z)|}$ on jatkuva, sillä jatkuvien funktioiden summa on jatkuva.

(6) $\ln(1+\sqrt{|Pr_1(x,y,z)+Pr_2(x,y,z)+Pr_3(x,y,z)|})$ on jatkuva, sillä se on saatu yhdistettynä funktiona luonnollisesta logaritmista ja kohdan (5) funktiosta, jotka ovat jatkuvia.

(7) $Pr_1(x,y,z)\cdot Pr_1(x,y,z)$ on jatkuvien funktioiden tulona jatkuva (Seuraus 3.16).

(8) $2+Pr_1(x,y,z)\cdot Pr_1(x,y,z)$ on jatkuvien funktioiden summana jatkuva.

(9) $f(x,y,z)$ on kohtien (6) ja (8) jatkuvien funktioiden osamäärä, joten se on jatkuva (Seuraus 3.16).

Siis $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ on jatkuva ($\mathbb{R}^3$:ssa).

Vastaava asia tiiviimmin todettuna: luonnollinen logaritmi, neliöjuuri, itseisarvo, vakiofunktiot, yhteenlasku, kertolasku ja jakolasku ovat jatkuvia funktioita, joten niistä yhdistämällä muodostettu funktio f on jatkuva.

(4) (Tällaisten merkintöjen yhteydessä määrittelyjoukko on tapana valita niin laajaksi kuin mahdollista.) Lausekkeet

$$\frac{xy}{z} \quad \text{ja} \quad \frac{\cos(x+y)}{\sin z}$$

on määritelty kaikkialla muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa eli kun

$$z\neq 0 \text{ ja } \sin z\neq 0 \iff z\neq n\pi \text{ kaikilla } n\in\mathbb{Z}.$$

Siis funktion f määrittelyjoukko on $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\neq n\pi$ kaikilla $n\in\mathbb{Z}\}$. Funktion $f:A\to\mathbb{R}^2$ komponenttifunktiot ovat

$$f_1: A\to\mathbb{R},\quad f_1(x,y,z)=\frac{xy}{z}, \quad \text{ja}$$
$$f_2: A\to\mathbb{R},\quad f_2(x,y,z)=\frac{\cos(x+y)}{\sin z}.$$

Komponenttifunktiot f_1 ja f_2 ovat jatkuvia, sillä ne on saatu yhdistettyinä funktioina kertolaskusta, jakolaskusta, yhteenlaskusta sekä trigonometrisistä funktioista cos ja sin, jotka ovat kaikki jatkuvia. Koska komponenttifunktiot

$f_1 : A \to \mathbb{R}$ ja $f_2 : A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvat, niin $f : A \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ on jatkuva (monisteen sivu 107).

(5)

$$D_1 f(x,y,z) = D_x f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$$
$$= \left(D_x \frac{xy}{z},\ D_x \frac{\cos(x+y)}{\sin z}\right) = \underline{\left(\frac{y}{z},\ -\frac{\sin(x+y)}{\sin z}\right)}.$$

$$D_2 f(x,y,z) = \left(D_y \frac{xy}{z},\ D_y \frac{\cos(x+y)}{\sin z}\right) = \underline{\left(\frac{x}{z},\ -\frac{\sin(x+y)}{\sin z}\right)}.$$

$$D_3 f(x,y,z) = \left(D_z \frac{xy}{z},\ D_z \frac{\cos(x+y)}{\sin z}\right)$$
$$= \underline{\left(-\frac{xy}{z^2},\ -\frac{\cos(x+y)}{\sin^2 z}\cos z\right)}.$$

Huom. Esimerkiksi merkintä $D_1 f$ tarkoittaa osittaisderivaattaa funktion f ensimmäisen muuttujan suhteen. Sen sijaan esimerkiksi merkintää $D_1 \frac{xy}{z}$ ei pitäisi käyttää, sillä siitähän ei ilmene mikä on lausekkeen $\frac{xy}{z}$ esittämän funktion ensimmäinen muuttuja.

(6) Differentioituva funktio kasvaa nopeiten gradienttinsa suuntaan (monisteen sivut 121-122). Koska funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 7x^2 + 5xy - 9y^2 + x$, on jatkuvasti derivoituva (= sen osittaisderivaatat $D_1 f$ ja $D_2 f$ ovat jatkuvat), se on differentioituva (Lause 3.38). Nyt

$$\nabla f(x,y) = (D_1 f(x,y),\ D_2 f(x,y))$$
$$= (14x + 5y + 1,\ 5x - 18y).$$

Siis pisteessä $(1,2)$ funktio f kasvaa nopeiten suuntaan

$$\nabla f(1,2) = (14 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 1,\ 5 \cdot 1 - 18 \cdot 2) = \underline{(25, -31)}.$$