① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz + x^2$, ja $V = \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 1 \le z \le 2\}$.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 dy \int_1^2 dz\,(xyz + x^2) = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 dy \Big/_1^2 (xy\tfrac{z^2}{2} + x^2 z)$$

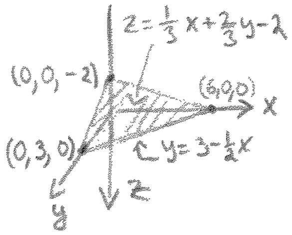
$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 dy\,(2xy + 2x^2 - \tfrac{1}{2}xy - x^2) = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 dy\,(\tfrac{3}{2}xy + x^2)$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \Big/_0^2 (\tfrac{3}{4}xy^2 + x^2 y) = \int_{-1}^{1} (3x + 2x^2)\,dx = \Big/_{-1}^{1} (\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3)$$

$$= \tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{2} - (-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{4}{3} = \underline{\underline{1\tfrac{1}{3}.}}$$

② Tässä tehtävässä voidaan integroimisjärjestys valita "helposti" (= joukkoa V ei tarvitse jakaa palasiin) miten tahansa, katso monisteen sivut 81–83. Mahdollisuuksia on siis kaikkiaan $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Seuraavassa on esitetty kolme näistä tavoista.

Tapa 1. $x + 2y - 3z = 6 \iff z = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - 2$. Lisäksi (x,y)-tasossa eli, kun $z = 0$, pätee: $x + 2y - 3z = 6 \overset{(z=0)}{\iff} y = 3 - \tfrac{1}{2}x$.



$V = \{(x,y,z) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - 2 \le z \le 0\}$
$= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in A,\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - 2 \le z \le 0\}$, missä
$A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 3 - \tfrac{1}{2}x\}$. Siis
$V = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 3 - \tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - 2 \le z \le 0\}$.

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_A \Big(\int_{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 2}^{0} dz\Big)\,dx\,dy = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{1}{2}x} dy \int_{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 2}^{0} dz = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{1}{2}x} dy \Big/_{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 2}^{0} z$$

$$= \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{1}{2}x} dy\,(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + 2) = \int_0^6 dx \Big/_0^{3-\frac{1}{2}x} (-\tfrac{1}{3}xy - \tfrac{1}{3}y^2 + 2y) = \int_0^6 \Big(-x + \tfrac{1}{6}x^2$$

$$- \tfrac{1}{3}(3 - \tfrac{1}{2}x)^2 + 6 - x\Big)\,dx = \Big/_0^6 \Big(-\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{18}x^3 + \tfrac{2}{9}(3 - \tfrac{1}{2}x)^3 + 6x - \tfrac{x^2}{2}\Big)$$

$$= -18 + 12 + 0 + 36 - 18 - 6 = \underline{6.}$$

Tapa 2. Kuten edellä: $x + 2y - 3z = 6 \iff z = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - 2$. Lisäksi (x,y)-tasossa eli, kun $z = 0$ pätee: $x + 2y - 3z = 6 \overset{(z=0)}{\iff} x = 6 - 2y$.

$V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in A,\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - 2 \le z \le 0\}$, missä $A = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 6 - 2y\}$, eli $V = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 6 - 2y,\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - 2 \le z \le 0\}$.

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} dx \int_{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 2}^{0} dz = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} dx\,(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + 2)$$

$$= \int_0^3 dy \Big/_0^{6-2y} \left(-\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{2}{3}yx + 2x\right) = \int_0^3 \left(-\tfrac{1}{6}(6-2y)^2 - 4y + \tfrac{4}{3}y^2 + 12 - 4y\right) dy$$

$$= \Big/_0^3 \left(-\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)(6-2y)^3 - 2y^2 + \tfrac{4}{9}y^3 + 12y - 2y^2\right) = \ldots = \underline{\underline{6.}}$$

Tapa 3. $x+2y-3z=6 \iff x = 6-2y+3z$. Lisäksi (y,z)-tasossa eli kun $x=0$, pätee: $x+2y-3z=6 \overset{(x=0)}{\iff} y = 3+\frac{3}{2}z$, $V=\{(x,y,z) \mid -2 \le z \le 0,\ 0 \le y \le 3+\frac{3}{2}z,\ 0 \le x \le 6-2y+3z\}$.

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{0} dz \int_0^{3+\frac{3}{2}z} dy \int_0^{6-2y+3z} dx = \ldots = \underline{\underline{6.}}$$

(3) $V=\{(x,y,z) \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ y \ge 0\}$. Siirrytään pallokoordinaatteihin muunnoksella $g: B \to V$, missä $g(r,\theta,\varphi) = (x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ ja $B=\{(r,\theta,\varphi) \mid 1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$. (Miksi koordinaateille r, θ ja φ on nämä rajat?) Kuvaus g on kullin sisti (jatkuvasti derivoituva melkein bijektio) ja sen Jacobin determinantin itseisarvo $|J_g(r,\theta,\varphi)|$ on $r^2\sin\theta$ (katso monisteen sivu 85). Niinpä nyt saadaan

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_B |J_g(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi\, r^2\sin\theta$$

$$= \pi\int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta\, r^2 \sin\theta = \pi \int_1^3 dr \Big/_0^\pi -r^2\cos\theta = 2\pi\int_1^3 r^2\,dr = 2\pi \Big/_1^3 \frac{r^3}{3}$$

$$= 2\pi\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{52}{3}\pi.}}$$

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \iiint_B r\sin\theta\cos\varphi\,|J_g(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi\, r^3\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$= \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta \Big/_0^\pi r^3\sin^2\theta\sin\varphi = \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta\, 0 = \underline{0.}$$

$$\iiint_V y\,dx\,dy\,dz = \iiint_B r\sin\theta\sin\varphi\,|J_g(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi\, r^3\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$= \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta \Big/_0^\pi -r^3\sin^2\theta\cos\varphi = \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta\, 2r^3\sin^2\theta \overset{(*)}{=} \int_1^3 dr \int_0^\pi d\theta\, r^3(1-\cos(2\theta))$$

$$= \int_1^3 dr \Big/_0^\pi r^3\left(\theta - \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\right) = \int_1^3 \pi r^3\,dr = \Big/_1^3 \frac{\pi}{4}r^4 = \frac{\pi}{4}(81-1) = \underline{20\pi.}$$

(*) $2\sin^2\theta = 1-\cos(2\theta)$.

$$\iiint_V z\,dxdydz = \iiint_B r\cos\theta\,|J_g(r,\theta,\varphi)|\,drd\theta d\varphi = \int_1^3 dr \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta\, r^3\cos\theta\sin\theta$$
$$= \int_1^3 dr \int_0^\pi d\varphi \Big/_0^\pi r^3 \tfrac{1}{2}\sin^2\theta = \int_1^3 dr \int_0^\pi d\varphi\, 0 = \underline{0.}$$

Siis keskiö on

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(V)}\left(\iiint_V x\,dxdydz, \iiint_V y\,dxdydz, \iiint_V z\,dxdydz\right) = \left(0, \frac{3}{52\pi}\cdot 20\pi, 0\right) = \underline{\underline{\left(0, \frac{15}{13}, 0\right)}}.$$

(4) $f(x,y,z) \geq 0$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ joss $c \geq 0$. Tutkitaan sitten mitä vaatimuksia ehto $\int_{\mathbb{R}^3} f = 1$ asettaa. Vertaa tämän epäoleellisen integraalin laskemista monisteen esimerkkiin 2.3.8. Huomaa erityisesti, ettei f vaihda merkkiä! Siirrytään sylinterikoordinaatteihin. Tämän muunnoksen Jacobin determinantin itseisarvo $|J_g(\rho,\varphi,z)|$ on ρ, katso monisteen sivut 87–88.

Olkoot $A_R = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq R^2$ ja $-R \leq z \leq R\}$ ja $B_R = \{(\rho,\varphi,z) \mid 0 \leq \rho \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -R \leq z \leq R\}$, missä $R \geq 1$. Tällöin

$$\iiint_{A_R} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{B_R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,|J_g(\rho,\varphi,z)|\,d\rho d\varphi dz$$
$$= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz\, \frac{c}{(1+\rho^2)^2}\rho = \int_0^R \frac{c2\pi\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho$$
$$= \Big/_0^R -\frac{c\pi}{1+\rho^2} = -\frac{c\pi}{1+R^2} + c\pi \longrightarrow c\pi,$$

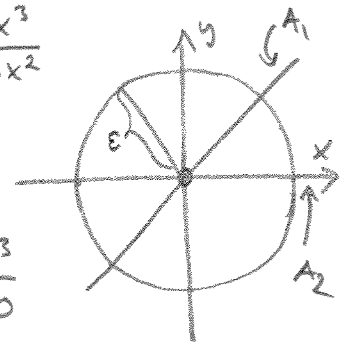
kun $R \to \infty$. Siis

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz = c\pi$$

ja tulee olla $c\pi = 1$ eli

$$\underline{\underline{c = \frac{1}{\pi}.}}$$

(5) Olkoot $A_1 = \{(x,y) \mid y = x\}$ ja $A_2 = \{(x,y) \mid y = 0\}$. Nyt $B'_\varepsilon(0,0) \cap A_1 \neq \emptyset$ kaikilla $\varepsilon > 0$, joten $(0,0)$ on joukon A_1 kasaantumispiste. Samoin $B'_\varepsilon(0,0) \cap A_2 \neq \emptyset$ kaikilla $\varepsilon > 0$, joten $(0,0)$ on joukon A_2 kasaantumispiste. Nyt



$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in A_1} \frac{2xy + x^3}{2x^2+3y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in A_1} \frac{2xx + x^3}{2x^2+3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2+x)}{x^2(2+3)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{5} + \frac{x}{5}\right) = \frac{2}{5} \quad \text{ja}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in A_2} \frac{2xy + x^3}{2x^2+3y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in A_2} \frac{0 + x^3}{2x^2+0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Koska nämä raja-arvot ovat eri suuret, ei raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy+x^3}{2x^2+3y^2}$ ole olemassa (luentomonisteen seuraus 3.11).

<u>Huom.</u> On oleellista todeta, että $(0,0)$ on sekä A_1:n että A_2:n kasaantumispiste, muutenhan edellä laskettuja raja-arvoja ei olisi määritelty.

(6) <u>Väite</u> $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4} = 0.$

(Huomaa, että on ensin keksittävä mikä raja-arvo mahtaa olla, sen voi tehdä esimerkiksi tutkimalla raja-arvoa lähestyttäessä origoa suoraa $y=0$ pitkin. Jos väitteen raja-arvo on olemassa, niin se on sama.)

<u>Tod.</u>

$$\left|\frac{x^5+y^5}{x^4+y^4} - 0\right| = \left|\frac{x^5}{x^4+y^4} + \frac{y^5}{x^4+y^4}\right| \overset{(*)}{\leq} \left|\frac{x^5}{x^4+y^4}\right| + \left|\frac{y^5}{x^4+y^4}\right|$$

$$\leq |x|\left|\frac{x^4}{x^4+y^4}\right| + |y|\left|\frac{y^4}{x^4+y^4}\right| \leq |x| + |y| \to 0,$$

kun $(x,y) \to (0,0)$. □ $\quad$ (*) Kolmioepäyhtälö.

Oletaan edellä olevan todistuksen loppu vielä harjoituksen vuoksi yksityiskohtaisemmin. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt

$$\left|\frac{x^5+y^5}{x^4+y^4} - 0\right| = \ldots \leq |x| + |y| < \varepsilon, \text{ kun } 0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

missä $\delta = \varepsilon/2$ (>0). Tällöin nimittäin $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon/2$ ja, vastaavasti, $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon/2$. Niinpä $|x| + |y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.