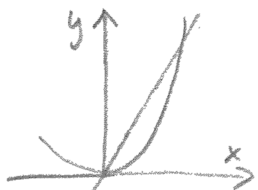


Selvitetään aluksi käyrien $y=x^2$ ja $y=2x$ leikkauspisteet.

$x^2 = 2x \iff x^2-2x=0 \iff x(x-2)=0 \iff$
$x=0$ tai $x=2$.

Siis leikkauspisteet ovat

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$.

Kun käyrä $y=2x$ pyörähtää x-akselin ympäri, niin välille $x\in[0,2]$ syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on (Lause 1.50)

$$V_1 = \pi\int_0^2 (2x)^2dx = 4\pi\int_0^2 x^2dx = 4\pi \Big/_0^2 \frac{x^3}{3} = \frac{32}{3}\pi.$$

Vastaava tilavuus käyrän $y=x^2$ tapauksessa:

$$V_2 = \pi\int_0^2 (x^2)^2dx = \pi\int_0^2 x^4dx = \pi\Big/_0^2\frac{x^5}{5} = \frac{32}{5}\pi.$$

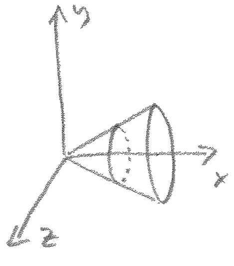
Näiden käyrien välin jäävän pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V_1 - V_2 = \frac{32}{3}\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{160-96}{15}\pi = \underline{\frac{64}{15}\pi.}$$

Kun käyrät pyörähtävät y-akselin ympäri, täytyy ensin x lausua y:n avulla: $y=x^2 \iff x=\sqrt{y}$, kun $x\geq 0$, ja $y=2x \iff x=y/2$. Nyt pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2dy - \pi\int_0^4\left(\frac{y}{2}\right)^2dy = \pi\Big/_0^4\frac{y^2}{2} - \frac{\pi}{4}\Big/_0^4\frac{y^3}{3}$$

$$= 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{24-16}{3}\pi = \underline{\frac{8}{3}\pi.}$$



2

Pyörähdyskappaleen tilavuus on (Lause 1.50)

$$\pi\int_0^h (kx)^2dx = \pi k^2\int_0^h x^2dx = \pi k^2\Big/_0^h\frac{x^3}{3}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{3}k^2h^3.}$$

Pyörähdyskappaleen vaipan ala on (Lause 1.50)

$$2\pi\int_0^h |kx|\sqrt{1+(D(kx))^2}\,dx = 2\pi\int_0^h kx\sqrt{1+k^2}\,dx$$
$$= 2\pi k\sqrt{1+k^2}\int_0^h x\,dx = 2\pi k\sqrt{1+k^2}\Big/_0^h \frac{x^2}{2} = \underline{\underline{\pi h^2 k\sqrt{1+k^2}}}.$$

③
$$\int_0^M x^2e^{-2x}\,dx \overset{\text{os.int.}}{=} \Big/_0^M x^2\frac{e^{-2x}}{-2} - \int_0^M 2x\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx = -\frac{M^2}{2}e^{-2M}$$
$$+\int_0^M xe^{-2x}\,dx \overset{\text{os.int.}}{=} -\frac{M^2}{2}e^{-2M} + \Big/_0^M x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int_0^M 1\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx$$
$$= -\frac{M^2}{2}e^{-2M} - \frac{M}{2}e^{-2M} - \frac{1}{4}\Big/_0^M e^{-2x}$$
$$= -\frac{M^2}{2}e^{-2M} - \frac{M}{2}e^{-2M} - \frac{1}{4}(e^{-2M}-1) \xrightarrow[M\to\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Siis integraali $\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx$ suppenee ja $\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$.

④ (a) $\frac{x^5+1}{x^6-1} \geq \frac{x^5+1}{x^6} \geq \frac{x^5}{x^6} = \frac{1}{x} \geq 0$ kaikilla $x \in [2,\infty[$.

Kun $M>0$,
$$\int_2^M \frac{1}{x}\,dx = \Big/_2^M \ln x = \ln M - \ln 2 \to \infty, \text{ kun } M\to\infty.$$
Siis integraali $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ hajaantuu. Minoranttiperiaatteen mukaan integraali $\int_2^\infty \frac{x^5+1}{x^6-1}\,dx$ hajaantuu myös.

(b) Olkoon $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$, $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$. Siis $f'(x)$:n ainoa nollakohta välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on pisteessä $x = \frac{\pi}{3}$.

	0 – $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$ – $\frac{\pi}{2}$
f	↗	↘
f'	+	−

Siis välillä $[0,\frac{\pi}{2}]$ funktion f pienin arvo on $\min(f(0), f(\frac{\pi}{2})) = \min(0, 1-\frac{\pi}{4}) = 0$. Niinpä $\sin x \geq \frac{1}{2}x$ kaikilla $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, joten:

$$0 \leq \frac{x\sqrt{x}}{\sin^2 x} \leq \frac{x\sqrt{x}}{(\frac{1}{2}x)^2} = 4\frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{kaikilla } x \in\,]0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Kun $a>0$,
$$\int_a^{\pi/2} \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx = \Big/_a^{\pi/2} 8\sqrt{x} = 8(\sqrt{\pi/2}-\sqrt{a}) \to 8\sqrt{\pi/2}, \text{ kun } a\to 0+.$$

Siis integraali $\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx$ suppenee. Majoranttiperiaatteen mukaan myös integraali $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sqrt{x}}{\sin^2 x}\,dx$ suppenee.

(5) Vaipan ala on (Lause 1.50)

$$2\pi \int_1^\infty \left|\frac{1}{x}\right| \sqrt{1+\left(D\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx.$$

Nyt $0 \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{x}\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}_{\ge 1}$ kaikilla $x \in [1,\infty[$. Lisäksi, kun $M>0$, $\int_1^M \frac{1}{x}dx = \Big/_1^M \ln|x| = \ln M \to \infty$, kun $M \to \infty$, joten integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ hajaantuu. Minoranttiperiaatteen mukaan myös integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$ hajaantuu. Siis vaipan pinta-ala on ääretön.

(6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tiheysfunktio joss

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ja

(2) $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tehtävän funktiolle ehto (2) on voimassa joss $a \ge 0$. Ehto (1) on voimassa joss epäoleelliset integraalit $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ ja $\int_0^\infty f(x)dx$ suppenevat ja niiden summa on 1. Nyt tietenkin $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = 0$ ja

$$\int_0^M axe^{-4x} \overset{\text{os.int.}}{=} \Big/_0^M ax\frac{e^{-4x}}{-4} - \int_0^M a\frac{e^{-4x}}{-4}\,dx = -\frac{aM}{4}e^{-4M} + \frac{a}{4}\int_0^M e^{-4x}dx$$

$$= -\frac{aM}{4}e^{-4M} + \frac{a}{4}\Big/_0^M \frac{e^{-4x}}{-4} = -\frac{aM}{4}e^{-4M} - \frac{a}{16}\left(e^{-4M}-1\right)$$

$$\to \frac{a}{16}, \text{ kun } M \to \infty.$$

Siis f on tiheysfunktio joss $\underline{a=16}$.