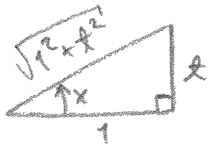
1. Sijoitetaan $\tan x = t$. Koska $x \in [\pi/4, \pi/3] \subset]-\pi/2, \pi/2[$, niin $x = \arctan t$. $D \arctan t = (1+t^2)^{-1}$, joten $dx = (1+t^2)^{-1} dt$. Rajat: kun $x = \pi/4$, $t = \tan(\pi/4) = 1$, ja kun $x = \pi/3$, $t = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Tilanteessa $\tan x = t$, $x \in [\pi/4, \pi/3]$, voidaan piirtää seuraava kuva.



Kuvasta nähdään, että $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ja $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Siis $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ ja $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$. Niinpä

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{9\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{9\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{9-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{9-t^2}\,dt.$$

Koska $9-t^2 = (3-t)(3+t)$, polynomilla $9-t^2$ on yksinkertaiset nollakohdat $t=3$ ja $t=-3$. Siksi saadaan osamurtokehitelmä

$$\frac{1}{9-t^2} = \frac{\overset{t+3)}{A}}{t-3} + \frac{\overset{t-3)}{B}}{t+3} \iff \frac{-1}{t^2-9} = \frac{At+3A+Bt-3B}{t^2-9}.$$

Jälkimmäisessä yhtälössä pitää osoittajien olla samat:

$$-1 = (A+B)t + (3A-3B),$$

koska tämän pitää päteä äärettömän monella t:n arvolla (välillä $[1,\sqrt{3}]$), täytyy olla

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 3A-3B = -1 \end{cases} \overset{(-3)}{} \iff \begin{cases} A+B = 0 \\ -6B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Nyt saadaan

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{9-t^2}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{-1/6}{t-3} + \frac{1/6}{t+3}\right) dt = \frac{1}{6} \Big/_1^{\sqrt{3}} \left(-\ln|t-3| + \ln|t+3|\right)$$

$$= \frac{1}{6} \Big/_1^{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{|t+3|}{|t-3|}\right) = \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) - \ln\left(\frac{4}{2}\right)\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{\underset{6-2\sqrt{3}}{\cancel{6-2\sqrt{3}}}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{18+12\sqrt{3}+6}{36-12}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{24+12\sqrt{3}}{24}\right) = \underline{\frac{1}{6}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

2 Huom. Ellei toisin mainita, niin tällaisissa tapauksissa funktion määrittelyjoukko valitaan mahdollisimman laajaksi.

(1) Jos $0 \in [-x, x^2] \cup [x^2, -x]$ (huomaa, että voi olla myös $x^2 < -x$), niin integraalia $\int_{-x}^{x^2} \sin(\frac{1}{t})\,dt$ ei ole määritelty, koska integroitava funktio ei ole määritelty pisteessä $t=0$.

(2) Jos $0 \notin [-x, x^2] \cup [x^2, -x]$, niin integroitava funktio on määritelty ja jatkuva koko integroimisvälillä. Niinpä Lauseen 1.35 perusteella integraali $\int_{-x}^{x^2} \sin(\frac{1}{t})\,dt$ on olemassa.

Jos $x \geq 0$, ollaan tapauksessa (1). Jos $x<0$, ollaan tapauksessa (2). Siis funktion f määrittelyjoukko on $\{x \in \mathbb{R} \mid x<0\}$.

Tehtävien 2 ja 3 ratkaisu perustuu integraalilaskennan päälauseeseen. Monisteessa se on muotoiltu seuraavasti (Lause 1.38). Kun funktio $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad (1)$$

niin I on derivoituva ja $I'(x) = f(x)$ kaikille $x \in [a,b]$. Tämän ja seuraavan tehtävän ratkaisua varten huomataan, että vastaava asia pätee myös, kun kaavassa (1) a korvataan millä tahansa luvulla $c \in [a,b]$. Tämä nähdään välittömästi yhtälön

$$\int_c^x f(t)\,dt = \int_c^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt$$

avulla, mikä puolestaan on voimassa Lauseen 1.32(e) lisähuomautuksen perusteella.

Kun $x<0$,

$$f(x) = \int_{-x}^{x^2} \sin\frac{1}{t}\,dt \overset{(1)}{=} \int_{-x}^{1} \sin\frac{1}{t}\,dt + \int_1^{x^2} \sin\frac{1}{t}\,dt \overset{(2)}{=} -\int_1^{-x} \sin\frac{1}{t}\,dt$$

$$+ \int_1^{x^2} \sin\frac{1}{t}\,dt = -I(-x) + I(x^2) = I(x^2) - I(-x),$$

(1) Lauseen 1.32(e) lisähuomautus. (2) monisteen sivulla 30 oleva määritelmä.

missä $I(x) = \int_1^x \sin\frac{1}{t}\,dt$. Koska $\sin\frac{1}{t}$ on jatkuva, niin integraalilaskennan päälauseen (katso edellä oleva huomautus) ja yhdistettyjen funktioiden derivoimissäännön perusteella f on derivoituva ja

$$\begin{aligned} f'(x) &= I'(x^2)D(x^2) - I'(-x)D(-x) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)2x - \sin\left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \underline{\underline{2x\sin\frac{1}{x^2} - \sin\frac{1}{x}}}. \end{aligned}$$

<u>Huom.</u> Tehtävän ratkaisussa olisi voinut käyttää apuna myös Lausetta 1.39. Koska $I(x) = \int_1^x \sin\frac{1}{t}\,dt$ on eräs funktion $\sin\frac{1}{t}$ integraalifunktio välillä $]0,\infty[$ (integraalilaskennan päälause), niin (Lause 1.39)

$$\int_{-x}^{x^2} \sin\frac{1}{t}\,dt = I(x^2) - I(-x),$$

kun $x<0$.

③ Olkoon

$$I(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

Koska e^{t^2} on jatkuva, niin integraalilaskennan päälauseen perusteella (katso myös tehtävän 3 ratkaisussa mainittu huomautus) $I(x)$ on derivoituva ja $I'(x) = e^{x^2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nyt

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt = I(x^2),$$

joten yhdistettyjen funktioiden derivoimissäännön perusteella f on derivoituva ja

$$f'(x) = I'(x^2)D(x^2) = e^{(x^2)^2}2x = 2xe^{x^4}.$$

Kulkukaavio:

f	↘	↗
f'	$-$	$+$
	0	

Siis välillä $]-\infty,0]$ f on aidosti laskeva ja välillä $[0,\infty[$ f on aidosti kasvava. ((Aidosti) monotoninen funktio on funktio, joka on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) laskeva.)

(4) Selvitetään aluksi käyrien leikkauspisteiden x-koordinaatit.

$$x^3+2x+1 = x^2+2x+1 \iff x^3-x^2=0 \iff x^2(x-1)=0 \iff$$
$$x=0 \text{ tai } x=1.$$

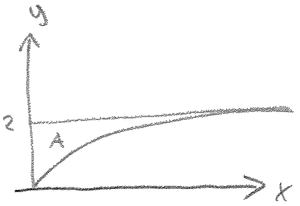
Lisäksi

$$x^3+2x+1 \le x^2+2x+1 \iff x^2(x-1)\le 0,$$

mikä pätee välillä [0,1]. Kysytty ala on Lauseen 1.45(b) perusteella

$$\int_0^1 |(x^2+2x+1)-(x^3+2x+1)|\,dx = \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$
$$= \Big/_0^1 \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}.$$

(5)

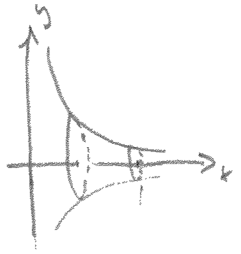


$A=\{(x,y) \mid 0\le y\le 2,\ 0\le x\le ye^y\}$
Sovelletaan Lausetta 1.45(a) tilanteeseen, jossa x:n ja y:n roolit on vaihdettu (vrt. esim. 1.47).

A:n ala on

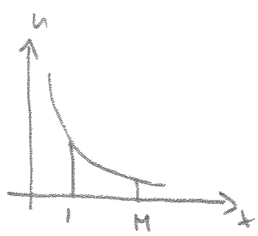
$$\int_0^2 ye^y\,dy \overset{\text{os.int.}}{=} \Big/_0^2 ye^y - \int_0^2 1e^y\,dy = 2e^2-0e^0-\Big/_0^2 e^y = 2e^2-(e^2-e^0)$$
$$= \underline{\underline{e^2+1}}.$$

(6)



$y=\frac{1}{x}$, $1\le x\le M$. Pyörähdyskappaleen tilavuus (Lause 1.50):

$$V_M = \pi\int_1^M \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \Big/_1^M -\frac{1}{x} = \pi\left(-\frac{1}{M}+1\right)$$
$$= \underline{\underline{\pi\left(1-\frac{1}{M}\right)}} \xrightarrow[M\to\infty]{} \underline{\underline{\pi}}.$$



Ala (Lause 1.45(a)):

$$A_M = \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \Big/_1^M \ln x = \ln M - \ln 1 = \underline{\underline{\ln M}} \xrightarrow[M\to\infty]{} \underline{\underline{\infty}}.$$