① $$\int \frac{dx}{x^2+10x+25} = \int \frac{dx}{(x+5)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x+5}+C}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26} \overset{(*)}{=} \int \frac{dx}{(x+5)^2-5^2+26} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+1} \overset{(**)}{=}$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t)+C = \underline{\underline{\arctan(x+5)+C}}.$$

(*) Täydennetään neliöksi. Yleisesti neliöksi täydentäminen menee seuraavasti ($a \neq 0$): $ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}) = a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}+c$. (Huom: toisen asteen yhtälön ratkaisukaava johdetaan neliöksi täydentämällä.)

(**) sij. $t = x+5$, $dt = dx$.

② Integroitava on määritelty, kun $x \neq -2$ ja $\frac{x+1}{x+2} \geq 0$.

Merkkitarkastelu:

	$x<-2$	$-2<x<-1$	$x>-1$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x+2}$	$+$	$-$	$+$

Siis $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ on määritelty, kun $x<-2$ tai $x \geq -1$.

Integraalifunktio on määritelty aina jollakin välillä. Valitaan tämä väli mahdollisimman laajaksi. Se on siis joko $]-\infty,-2[$ tai $[-1,\infty[$.

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \iff t^2 = \frac{x+1}{x+2} \text{ ja } t \geq 0.$$

Kun $x \in]-\infty,-2[$, niin $t \in]1,\infty[$ (miksi?). Kun $x \in [-1,\infty[$, niin $t \in [0,1[$ (miksi?). Tällöin

$$t^2 = \frac{x+1}{x+2} \iff t^2x+2t^2 = x+1 \iff (t^2-1)x = 1-2t^2 \iff$$

$$x = \frac{1-2t^2}{t^2-1} \iff x = \frac{-1+2t^2}{1-t^2}.$$

$$D\left(\frac{-1+2t^2}{1-t^2}\right) = \frac{4t(1-t^2)-(-1+2t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t-4t^3-2t+4t^3}{(1-t^2)^2}$$

$$= \frac{2t}{(1-t^2)^2}. \quad \text{Siksi } dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt \text{ ja}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx = \int t\,\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt = \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}\,dt,$$

$(1-t^2)^2 = ((1-t)(1+t))^2 = (1-t)^2(1+t)^2$, joten integroitavan rationaalifunktion nimittäjän nollakohdat ovat $t=1$ ja $t=-1$. Ne ovat molemmat kaksinkertaisia nollakohtia. Siksi tälle rationaalifunktiolle saadaan osamurtokehitelmä (A_1, A_2, B_1 ja B_2 ovat sopivasti valittuja vakioita)

$$\frac{2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{\overset{(t-1)(t+1)^2}{A_1}}{t-1} + \frac{\overset{(t+1)^2}{A_2}}{(t-1)^2} + \frac{\overset{(t-1)^2(t+1)}{B_1}}{t+1} + \frac{\overset{(t-1)^2}{B_2}}{(t+1)^2} \iff$$

$$\frac{2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{(t-1)(t^2+2t+1)A_1 + (t^2+2t+1)A_2 + (t^2-2t+1)(t+1)B_1 + (t^2-2t+1)B_2}{(1-t^2)^2}.$$

osoittajien täytyy olla samat:

$$2t^2 = (t^3+2t^2+t-t^2-2t-1)A_1 + (t^2+2t+1)A_2 + (t^3-2t^2+t+t^2-2t+1)B_1 + (t^2-2t+1)B_2 \iff$$

$$2t^2 = (A_1+B_1)t^3 + (A_1+A_2-B_1+B_2)t^2 + (-A_1+2A_2-B_1-2B_2)t + (-A_1+A_2+B_1+B_2).$$

Koska tämän pitää päteä kaikille tarkasteltavaan väliin ($]1,\infty[$ tai $[0,1[$) kuuluville arvoilla t, on oltava

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_1 + B_1 & = 0 & \\ A_1 + A_2 - B_1 + B_2 & = 2 & \leftarrow (-1) \\ -A_1 + 2A_2 - B_1 - 2B_2 & = 0 & \leftarrow (1) \\ -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 & = 0 & \leftarrow (1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A_1 + B_1 & = 0 & \\ A_2 - 2B_1 + B_2 & = 2 & \leftarrow (-1) \\ 2A_2 - 2B_2 & = 0 & \leftarrow (-2) \\ A_2 + 2B_1 + B_2 & = 0 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rl} A_1 + B_1 & = 0 \\ -4B_1 & = 2 \\ -4B_1 - 4B_2 & = 0 \\ A_2 + 2B_1 + B_2 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{2} \\ A_2 = \frac{1}{2} \\ B_1 = -\frac{1}{2} \\ B_2 = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Siis

$$\int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}\,dt = \int\left(\frac{1/2}{t-1} + \frac{1/2}{(t-1)^2} - \frac{1/2}{t+1} + \frac{1/2}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\,{}^{(t+1)} - \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\,{}^{(t-1)} + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\frac{t+1}{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\frac{t-1}{t^2-1} + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{t}{1-t^2} + C \overset{(*)}{=}$$

$$\underline{\frac{1}{2}\ln\left|1-\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right| + (x+2)\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + C},$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja $x \in I$ sekä $I =]-\infty,-2[$ tai $I = [-1,\infty[$.

$(*)$ $1-t^2 = 1-\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-x-1}{x+2} = \frac{1}{x+2}$.

(Tarkistus derivoimalla...)

3. Huom. Monisteen sivulla 13 on painovirhe: Vaihe 1 koskee tapausta "$\deg P \geq \deg Q$", ei vain tapausta "$\deg P > \deg Q$".

Koska osoittajan polynomin aste on suurempi kuin nimittäjän, jaetaan ensin jakokulmassa:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^3+x^2-2 & x^4+x^3 \\ & x^4+x^3-2x \\ \hline & 2x \end{array}$$

Siten:

$$\frac{x^4+x^3}{x^3+x^2-2} = x + \frac{2x}{x^3+x^2-2}.$$

Polynomin x^3+x^2-2 eräs nollakohta on 1 (löydetään esimerkiksi kokeilemalla), siksi se on jaollinen $(x-1)$:llä:

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x+2 \\ \hline x-1 & x^3+x^2\quad\quad -2 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & 2x^2\quad\quad -2 \\ & 2x^2-2x \\ \hline & 2x-2 \\ & 2x-2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Siis $x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2)$. Polynomilla x^2+2x+2 ei ole nollakohtia, minkä näkee esim. toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta tai neliöksi täydentämällä: $x^2+2x+2 = (x+1)^2-1^2+2 = (x+1)^2+1 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Nyt saadaan osamurtokehitelmä:

$$\frac{2x}{x^3+x^2-2} = \frac{\overset{x^2+2x+2}{A}}{x-1} + \frac{\overset{x-1}{Bx+C}}{x^2+2x+2} \iff$$

$$\frac{2x}{x^3+x^2-2} = \frac{Ax^2+2Ax+2A + Bx^2-Bx+Cx-C}{x^3+x^2-2},$$

osoittajien tulee olla samat:

$$2x = (A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (2A-C).$$

Koska tämän on pädettävä koko tarkasteluvälillä (joko $]-\infty,1[$ tai $]1,\infty[$), saadaan

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 2A-B+C = 2 \leftarrow (-2) \\ 2A \quad -C = 0 \leftarrow (-2) \end{cases} \iff \begin{cases} A+B = 0 \\ -3B+C = 2 \leftarrow (1) \\ -2B-C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A+B = 0 \\ -5B = 2 \\ -2B-C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = -\frac{2}{5} \\ C = \frac{4}{5}, \end{cases}$$

siis

$$\int \frac{x^4+x^3}{x^3+x^2-2}\,dx = \int \left(x + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2x-4}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}\ln|x-1|$$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{2x+2-6}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \frac{6}{5}\int\frac{1}{(x+1)^2-1^2+2}\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|x^2+2x+2| + \frac{6}{5}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+2) + \frac{6}{5}\arctan(t) + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+2) + \frac{6}{5}\arctan(x+1) + C}},$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja $x \in I$ sekä väli I on joko $]-\infty,1[$ tai $]1,\infty[$.

(*) Ensimmäinen integraali lasketaan monisteen sivun 4 kaavalla (15), jälkimmäiseen tehdään sijoitus $t = x+1$, $dt = dx$.

(Tarkistus derivoimalla...)

(4) Ratkaisu perustuu kaavaan $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} =$$

$$\frac{1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

Siten

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx$$

$$= \int \frac{3}{8}dx + \frac{1}{4}\int 2\cos(2x)\,dx + \frac{1}{32}\int 4\cos(4x)\,dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C}},$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja $x \in]-\infty, \infty[$.

⑤ Huomataan aluksi, että e^{-x^2} on (aidosti) laskeva välillä $[1,5]$, sillä $De^{-x^2} = -2xe^{-x^2} < 0$, kun $x > 0$. Siksi, kun $0 < x_{i-1} < x_i$, $M_i = \sup\{e^{-x^2} \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = e^{-x_{i-1}^2}$ ja $m_i = \inf\{e^{-x^2} \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = e^{-x_i^2}$.

(a) $D = (1, \frac{3}{2}, 2, 3, 5)$

$$S_D = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = e^{-1^2}\left(\frac{3}{2}-1\right) + e^{-(\frac{3}{2})^2}\left(2-\frac{3}{2}\right) + e^{-2^2}(3-2) + e^{-3^2}(5-3)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-\frac{9}{4}} + e^{-4} + 2e^{-9}} \quad (\approx 0{,}2552).$$

$$s_D = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = e^{-(\frac{3}{2})^2}\left(\frac{3}{2}-1\right) + e^{-2^2}\left(2-\frac{3}{2}\right) + e^{-3^2}(3-2) + e^{-5^2}(5-3)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}e^{-\frac{9}{4}} + \frac{1}{2}e^{-4} + e^{-9} + 2e^{-25}} \quad (\approx 0{,}06198).$$

(b) $D' = (1, 2, 3, 4, 5)$

$$S_{D'} = \underline{e^{-1^2} + e^{-2^2} + e^{-3^2} + e^{-4^2}} \quad (\approx 0{,}3863).$$

$$s_{D'} = \underline{e^{-2^2} + e^{-3^2} + e^{-4^2} + e^{-5^2}} \quad (\approx 0{,}01844).$$

⑥ Sij. $t = \sqrt{x+1} \iff t^2 = x+1$ ja $t \ge 0 \iff x = t^2 - 1$ ja $t \ge 0$, $dx = 2t\,dt$.
Rajat: kun $x = 0$, $t = 1$, ja kun $x = 1$, $t = \sqrt{2}$.

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,t\,2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2)\,dt = 2\Big/_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right.$$

$$\left.- \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{12\sqrt{2} - 10\sqrt{2}}{15} + \frac{-3+5}{15}\right) = 2\left(\frac{2\sqrt{2}+2}{15}\right) = \underline{\underline{\frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}}}.$$