1 $$y' = x y^4$$

on ensimmäisen kertaluvun separoituva (epälineaarinen) differentiaaliyhtälö. Sen erikoisratkaisut saadaan yhtälön $y^4=0$ ratkaisuista. Siis sillä on erikoisratkaisu $y(x)=0$ kaikilla $x \in]-\infty, \infty[$. Muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int y^{-4}dy = \int x dx \iff -\frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \overset{(C=-3C_1)}{\iff}$$

$$y^{-3} = C - 3x^2/2 \iff y(x) = (C - 3x^2/2)^{-1/3},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja ratkaisuväli I on jokin seuraavista (miksi?).

<u>Tapaus (i) $C<0$.</u> $I =]-\infty, \infty[$

<u>Tapaus (ii) $C=0$.</u> I on joko $]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$.

<u>Tapaus (iii) $C>0$.</u> I on $]-\infty, -\sqrt{2C/3}[$, $]-\sqrt{2C/3}, \sqrt{2C/3}[$ tai $]\sqrt{2C/3}, \infty[$.

(a) $y(1)=1 \iff (C-3/2)^{-1/3} = 1 \iff C-3/2 = 1 \iff C = 5/2.$

Koska $C>0$ ollaan ratkaisuvälin osalta kohdassa (iii). Edelleen, koska $1 \in]-\sqrt{2C/3}, \sqrt{2C/3}[=]-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}[$, on tähän alkuarvotehtävään liittyvä ratkaisuväli $]-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}[$.

<u>Vastaus: $y(x) = (5/2 - 3x^2/2)^{-1/3}$, $x \in]-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}[$.</u>

(b) Ainoa erikoisratkaisu toteuttaa alkuehdon $y(1)=0$. (Niinpä olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen perusteella tiedetään, ettei mikään muu ratkaisu toteuta tätä alkuehtoa.)

<u>Vastaus: $y(x)=0$, $x \in]-\infty, \infty[$.</u>

(2) $y' = \dfrac{xy + y^2 + x^2}{x^2}$ eli $y' = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1.$

Siis tämä differentiaaliyhtälö on muotoa $y' = f(y/x)$. Kuten luentomonisteessa on neuvottu, tällainen yhtälö voidaan palauttaa separoituvaksi differentiaaliyhtälöksi sijoituksella $u(x) = y(x)/x$. Tällöin $y(x) = xu(x)$ ja $y'(x) = u(x) + xu'(x)$, ja saadaan

$$u + xu' = u + u^2 + 1 \iff xu' = u^2+1.$$

Koska $x=0$ ei voi kuulua alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisuväliin, voidaan olettaa että $x \neq 0$, jolloin saadaan separoituva differentiaaliyhtälö

$$u' = \frac{1}{x}(u^2+1). \qquad (1)$$

Koska yhtälöllä $u^2+1=0$ ei ole ratkaisuja, ei (1):llä ole erikoisratkaisuja. Niinpä kaikki sen ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \int \frac{dx}{x} \iff \arctan(u) = \ln|x| + C \iff$$

$$u(x) = \tan(\ln|x| + C), \qquad C \in \mathbb{R} \text{ ja } x \in I,$$

missä ratkaisuväli I on sellainen, että $\ln|x| + C \in]-\pi/2, \pi/2[$ eli $-\pi/2 - C < \ln|x| < \pi/2 - C$ eli $\exp(-\pi/2-C) < |x| < \exp(\pi/2 - C)$. Siis ratkaisuväli I on joko

$$]-e^{\pi/2-C}, -e^{-\pi/2-C}[\quad \text{tai} \quad]e^{-\pi/2-C}, e^{\pi/2-C}[.$$

<u>vastaus: $y(x) = xu(x) = x\tan(\ln|x| + C)$, $x \in I$.</u>

(3) $y' = 2y - 3y^2$

on ensimmäisen kertaluvun separoituva (epälineaarinen) differentiaaliyhtälö. Sen erikoisratkaisut saadaan yhtälöstä

$$2y - 3y^2 = 0 \iff y(2-3y) = 0 \iff y = 0 \text{ tai } y = 2/3.$$

Erikoisratkaisut ovat siis $y(x)=0$, $x \in]-\infty,\infty[$, ja $y(x)=2/3$, $x \in]-\infty,\infty[$. Ne eivät toteuta alkuehtoa $y(1)=1/3$. Muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int \frac{dy}{2y-3y^2} = \int dx . \qquad (1)$$

Etsitään osamurtokehitelmä:

$$\frac{1}{2y-3y^2} = {}^{y-2/3}\frac{A}{y} + {}^{y}\frac{B}{y-2/3} \iff$$

$$\frac{1}{2y-3y^2} = \frac{Ay-2A/3}{y^2-2y/3} + \frac{By}{y^2-2y/3} \iff$$

$$\frac{1}{2y-3y^2} = \frac{-3Ay+2A-3By}{2y-3y^2} \quad (\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0,2/3\}) \iff$$

$$\begin{cases} 2A=1 \\ -3A-3B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1/2 \\ B=-1/2. \end{cases}$$

Sijoittamalla tämä osamurtokehitelmä (1):een saadaan

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y-2/3} = \int dx \iff$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y-2/3| = x+C \iff$$

$$\frac{1}{2}(\ln|y| - \ln|y-2/3|) = x+C \iff$$

$$\ln\left(\frac{|y|}{|y-2/3|}\right) = 2x+2C \iff \left|\frac{y}{y-2/3}\right| = e^{2x+2C},$$

missä $C \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla tähän alkuehto $y(1)=1/3$, saadaan

$$\left|\frac{1/3}{1/3-2/3}\right| = e^{2+2C} \iff 1 = e^{2(1+C)} \iff C=-1.$$

Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen 5.7(iii) perusteella alkuehdon $y(1)=1/3$ toteuttavalla ratkaisulla pätee $0<y(x)<2/3$ koko ratkaisuvälillä (se ei leikkaa erikoisratkaisuja $y\equiv0$ ja $y\equiv2/3$). Niinpä nyt saadaan (huomaa itseisarvot)

$$\frac{y}{2/3-y} = e^{2x-2} \iff y = \frac{2}{3}e^{2x-2} - ye^{2x-2} \iff$$

$$y(1+e^{2x-2}) = \frac{2}{3}e^{2x-2} \iff$$

$$y(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^{2x-2}}{1+e^{2x-2}} = \underline{\frac{2/3}{1+e^{-2x+2}},\quad x \in \left]-\infty,\infty\right[.}$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2/3}{1+e^{-2x+2}} = \frac{2/3}{1+0} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

(Huomaa myös, että $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.)

(4) Ratkaistaan ensin differentiaaliyhtälö

$$y' + \frac{1}{x}y = x. \quad \text{(TY)}$$

<u>Tapa I.</u> Yhtälö (TY) on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen differentiaalyhtälö. Sitä vastaava homogeeninen yhtälö on

$$y' + \frac{1}{x}y = 0, \quad \text{(HY)}$$

jonka ratkaisu on (katso monisteen sivut 189 ja 183, missä vastaava on ratkaistu yleisemmässä muodossa separoituvana yhtälönä)

$$y(x) = C_1 e^{-F(x)},$$

missä $C_1 \in \mathbb{R}$ ja $F(x)$ on mikä tahansa funktion $1/x$ integraalifunktio, esim. $F(x) = \ln|x|$. Siis

$$y(x) = C_1 e^{-\ln|x|} = C_1 e^{\ln(|x|^{-1})} = C_1\frac{1}{|x|} = \frac{C}{x},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja ratkaisuväli I on joko $\left]-\infty,0\right[$ tai $\left]0,\infty\right[$ (ensimmäisessä tapauksessa $C = -C_1$ ja jälkimmäisessä $C = C_1$).

Etsitään seuraavaksi (TY):n eräs ratkaisu vakion variaatiolla eli tehdään siihen yrite $y(x) = C(x)/x$. Sijoittamalla tämä yrite (TY):hyn saadaan

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x \iff$$

$$\frac{C'(x)}{x} = x \overset{(x \neq 0)}{\iff} C'(x) = x^2,$$

mikä pätee esimerkiksi, kun $C(x) = x^3/3$. Siis saatiin (TY):n yksittäisratkaisu $y(x) = x^2/3$, $x \in I$. (TY):n yleinen ratkaisu saadaan lisäämällä homogeeniyhtälön (HY) yleiseen ratkaisuun mikä tahansa (TY):n ratkaisu (katso luentomonisteen sivu 187). Niinpä (TY):n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja I on joko $]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$.

Tapa II. Käytetään apuna integroivaa tekijää, joka on nyt $e^{F(x)}$, missä $F(x)$ on mikä tahansa $(1/x)$:n integraalifunktio, esim. $F(x) = \ln|x|$. Siis nyt integroivaksi tekijäksi voidaan valita x. (Ratkaisuvälistä $]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$ riippuva etumerkki voidaan jättää pois, sillä integroivan tekijän voi kertoa nollasta poikkeavalla vakiolla.) Kerrotaan (TY) puolittain integroivalla tekijällä x, jolloin saadaan

$$xy'(x) + y(x) = x^2 \iff \frac{d}{dx}(xy(x)) = x^2 \iff$$

$$xy(x) = \frac{x^3}{3} + C \overset{(x \neq 0)}{\iff} y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja I on joko $]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$.

Tehtävänä oli etsiä se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 0$. Koska $1 \in]0, \infty[$, ratkaisuväli I on $]0, \infty[$. Nyt pitää olla

$$y(1) = \frac{1^2}{3} + \frac{C}{1} = 0 \iff C = -\frac{1}{3}.$$

<u>vastaus: $y(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$, $x \in]0, \infty[$.</u>

5

$$y' + xy = x^3. \quad (TY)$$

Tapa I. Yhtälö (TY) on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen differentiaaliyhtälö. Sitä vastaava homogeeninen yhtälö on

$$y' + xy = 0, \quad (HY)$$

jonka ratkaisu on (vrt. tehtävä 4)

$$y(x) = c\, e^{-F(x)},$$

missä $c \in \mathbb{R}$, $x \in \,]-\infty, \infty[$ ja $F(x)$ on mikä tahansa x:n integraalifunktio, esim. $F(x) = x^2/2$.

Etsitään seuraavaksi (TY):n eräs ratkaisu vakion variannilla eli tehdään yrite $y(x) = C(x)e^{-x^2/2}$. Sijoittamalla tämä yrite (TY):hyn saadaan:

$$C'(x)e^{-x^2/2} - xC(x)e^{-x^2/2} + xC(x)e^{-x^2/2} = x^3 \iff$$
$$C'(x)e^{-x^2/2} = x^3 \iff C'(x) = x^3 e^{x^2/2} \iff$$
$$C(x) = \int x^2(xe^{x^2/2})\,dx \overset{\text{os.int.}}{=} x^2 e^{x^2/2} - \int 2xe^{x^2/2}\,dx$$
$$= x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + D,$$

missä $D \in \mathbb{R}$ ja voidaan valita esim. $D = 0$. Siis (TY):n yleinen ratkaisu on (vrt. tehtävä 4, kts. luentomoniste sivu 187)

$$\underline{\underline{y(x) = c\,e^{-x^2/2} + x^2 - 2, \quad \text{missä } c \in \mathbb{R} \text{ ja } x \in \,]-\infty, \infty[.}}$$

Tapa II. Käytetään apuna integroivaa tekijää, joka on nyt $e^{F(x)}$, missä $F(x)$ on mikä tahansa x:n integraalifunktio, esim. $F(x) = x^2/2$. Kerrotaan (TY) puolittain integroivalla tekijällä $e^{x^2/2}$, jolloin saadaan

$$e^{x^2/2}y' + xe^{x^2/2}y = x^3 e^{x^2/2} \iff \frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y) = x^3 e^{x^2/2} \iff$$
$$e^{x^2/2}y = \int x^3 e^{x^2/2}\,dx \overset{\text{(kuten yllä)}}{=} \cdots = x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + c.$$

Siis $\underline{\underline{y(x) = x^2 - 2 + c\,e^{-x^2/2}, \text{ missä } c \in \mathbb{R} \text{ ja } x \in \,]-\infty, \infty[.}}$

(6) Merkitään $u = y'$, jolloin u:lle saadaan differentiaaliyhtälö

$$u' = x u^2.$$

Tällä separoituvalla differentiaaliyhtälöllä on erikoisratkaisu $u(x) = 0$, $x \in]-\infty, \infty[$. Erikoisratkaisu ei kuitenkaan tule kyseeseen, sillä pitää olla $u(0) = y'(0) = -2$. Muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int \frac{du}{u^2} = \int x\,dx \iff -\frac{1}{u} = x^2/2 + C \iff u(x) = -\frac{1}{x^2/2 + C},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja ratkaisuväli I on seuraavanlainen.

Tapaus (i) $C<0$: I on $]-\infty, -\sqrt{-2C}[$, $]-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}[$ tai $]\sqrt{-2C}, \infty[$.
Tapaus (ii) $C=0$: I on $]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$.
Tapaus (iii) $C>0$: I on $]-\infty, \infty[$.

Koska nyt pitää olla $y'(0) = -2$ eli $u(0) = -2$, ollaan tapauksessa (iii) eli $C>0$ ja $I =]-\infty, \infty[$. Koska $y'(x) = u(x)$, niin

$$y(x) = \int u(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x^2/2 + C} = -\frac{1}{C}\int \frac{dx}{x^2/(2C) + 1} \overset{(*)}{=} -\frac{1}{C}\int \frac{\sqrt{2C}\,dt}{t^2+1}$$
$$= -\frac{\sqrt{2C}}{C}\arctan(t) + D = -\sqrt{\frac{2}{C}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2C}}\right) + D,$$

(*) sij $t = x/\sqrt{2C}$, $dx = \sqrt{2C}\,dt$.

missä $D \in \mathbb{R}$. Alkuarvon $y(0) = 1$ perusteella $D = 1$. Alkuarvon $y'(0) = -2$ eli $u(0) = -2$ perusteella $C = 1/2$.

Vastaus: $y(x) = -2\arctan(x) + 1$, $x \in]-\infty, \infty[$.