(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^4$, ja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$.

Koska funktio f on jatkuva, se saa kompaktissa joukossa A suurimman ja pienimmän arvon. Lisäksi f on derivoituva (A:n sisäpisteissä), joten voidaan soveltaa luentomonisteen sivulla 162–163 esitettyä menetelmää.

(1) $\nabla f(x,y) = \bar{0} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$

Ehdokas: $f(0,0) = \underline{0}.$

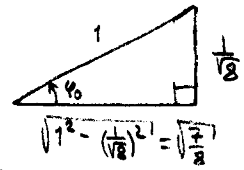
(2) Etsitään f:n suurin ja pienin arvo A:n reunalla $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

<u>Tapa I.</u> Siirtymällä napakoordinaatistoon saadaan ∂A:lle esitys

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

ja edelleen $f(x,y) = x^2 + y^4 = 4\cos^2\varphi + 16\sin^4\varphi$, kun $(x,y) \in \partial A$.
Olkoon $g: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(\varphi) = 4\cos^2\varphi + 16\sin^4\varphi$. On siis etsittävä g:n suurin ja pienin arvo. Ne saadaan joko pisteissä $\varphi \in]0, 2\pi[$, joissa $g'(\varphi) = 0$ tai välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä.

$$g'(\varphi) = 8\cos\varphi(-\sin\varphi) + 64\sin^3\varphi\cos\varphi = 0 \iff$$
$$8\cos\varphi\sin\varphi(-1 + 8\sin^2\varphi) = 0 \iff$$
$$\cos\varphi = 0 \text{ tai } \sin\varphi = 0 \text{ tai } \sin\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$$



$\sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{7}{8}}$

Merkitään $\varphi_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{8}}$. Ehdokkaat: $g(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2} + \pi) = \underline{16}$, $g(\pi) = \underline{4}$,
$g(\varphi_0) = g(\pi - \varphi_0) = g(\pi + \varphi_0) = g(2\pi - \varphi_0) = 4 \cdot \frac{7}{8} + 16 \cdot \frac{1}{64} = \frac{7}{2} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{15}{4}}$,
ja $g(0) = g(2\pi) = \underline{4}.$

<u>Tapa II.</u> A:n reuna ∂A on $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, missä $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Lagrangen menetelmän (Lause 4.36) perusteella piste $(x,y) \in \partial A$ voi olla funktion $f|\partial A$ lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = \bar{0} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = \bar{0} \quad \text{jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Ensimmäinen vaihtoehto ei toteudu, koska $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ kaikilla $(x,y) \in \partial A$. Toinen vaihtoehto:

$$\begin{cases} 2x - \lambda 2x = 0 & (1) \\ 4y^3 - \lambda 2y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

Yhtälö (1) voi toteutua vain, jos $\lambda = 1$ tai $x=0$. Sij $\lambda = 1$ (2):een $\Rightarrow 2y(2y^2-1)=0$ $\Rightarrow y=0$ tai $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Sij $x=0$ (3):een $\Rightarrow y = \pm 2$.

Koska ∂A on kompakti ja f on jatkuva, $f|\partial A$:lla on suurin ja pienin arvo. Ne saadaan $f|\partial A$:n lokaaleissa ääriarvokohdissa, siis ehdokkaat ovat: $f(2,0)$, $f(-2,0)$, $f(\sqrt{7/2}, \sqrt{1/2})$, $f(-\sqrt{7/2}, \sqrt{1/2})$, $f(\sqrt{7/2}, -\sqrt{1/2})$, $f(-\sqrt{7/2}, -\sqrt{1/2})$, $f(0,2)$ ja $f(0,-2)$.

(3) Vertailemalla ehdokkaita havaitaan, että f:n suurin ja pienin arvo A:ssa ovat <u>16 ja 0</u>.

(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$, ja $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/(\sqrt{3})^2 + y^2/(\sqrt{3/2})^2 = 1\}$ $(x^2 + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow (x,y) \in B)$. (Huomaa, että f on jatkuva ja B on kompakti, joten f:llä on suurin ja pienin arvo B:ssä.)

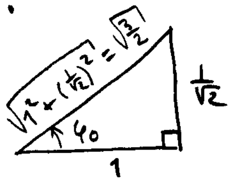
<u>Tapa I.</u> Siirrytään ns. elliptiseen napakoordinaatistoon (vrt. harj. 5 tehtävä 6)

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\, r\cos\varphi \\ y = \sqrt{3/2}\, r \sin\varphi \end{cases}, \quad r \in [0, \infty[\text{ ja } \varphi \in [0, 2\pi],$$

Jolloin $(x,y) \in B$ joss $r=1$. Kun $(x,y) \in B$, niin $f(x,y) = x+y = \sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3/2}\sin\varphi$. Olkoon $g: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(\varphi) = \sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3/2}\sin\varphi$. Funktion g suurin ja pienin arvo saavutetaan pisteissä, joissa $g'(\varphi) = 0$, $\varphi \in]0, 2\pi[$, tai välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä.

$$g'(\varphi) = -\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3/2}\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Merkitään $\varphi_0 = \arctan(1/\sqrt{2})$. Ehdokkaat ovat $g(\varphi_0) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2/3} + \sqrt{3/2} \cdot (1/\sqrt{3}) = \sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}/2 = \underline{3\sqrt{2}/2}$ ja $g(\varphi_0 + \pi) = \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{2/3}) + \sqrt{3/2} \cdot (-1/\sqrt{3}) = \underline{-3\sqrt{2}/2}$.



$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\sin\varphi_0 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Siis funktion f suurin ja pienin arvo ellipsillä $x^2 + 2y^2 = 3$ ovat <u>$3\sqrt{2}/2$ ja $-3\sqrt{2}/2$</u>.

<u>Tapa II (Lagrangen menetelmällä)</u>. Merkitään $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, missä $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3$. Nyt $\nabla g(x,y) = (2x, 4y) \neq (0,0)$ kaikilla $(x,y) \in B$, joten $f|B$:n lokaaleissa ääriarvokohdissa pätee (Lause 4,36)

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = \bar{0} \quad \text{jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - \lambda 2x = 0 \\ 1 - \lambda 4y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x = 1/\lambda = 4y \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1/\sqrt{2} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

(*) Huomaa, ettei λ voi olla 0.

Siis ehdokkaat $f|B$:n lokaaleiksi ääriarvoiksi ovat $f(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}/2$ ja $f(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}/2$. Koska f on jatkuva ja B on kompakti, f saa suurimman ja pienimmän arvon B:ssä. Ne saadaan $f|B$:n lokaaleissa ääriarvokohdissa, joten vastaus tehtävän kysymykseen on <u>$3\sqrt{2}/2$ ja $-3\sqrt{2}/2$</u>.

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x - y + z$. Merkitään $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}$, missä $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Koska f on jatkuva ja B on kompakti, f saa B:ssä suurimman ja pienimmän arvon. Ne saadaan funktion $f|B$ lokaaleissa ääriarvokohdissa, joissa pätee Lagrangen menetelmän (Lause 4.36) perusteella

$$\begin{cases} \nabla g(x,y,z) = \bar{0} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} \nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z) = \bar{0} \quad \text{jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Ensimmäinen vaihtoehto ei toteudu, sillä $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = \bar{0}$ vain, kun $(x,y,z) = \bar{0}$ ja $g(\bar{0}) = -1 \neq 0$. Toinen vaihtoehto:

$$\begin{cases} 1 - \lambda 2x = 0 \\ -1 - \lambda 2y = 0 \\ 1 - \lambda 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x = 1/\lambda \\ -2y = 1/\lambda \\ 2z = 1/\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(*) Huomaa, ettei λ voi olla 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{3} \\ y = -1/\sqrt{3} \\ z = 1/\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = -1/\sqrt{3} \\ y = 1/\sqrt{3} \\ z = 1/\sqrt{3}. \end{cases}$$

Siis ehdokkaat ovat $f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ ja $f(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = 3(-1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. Niinpä f:n suurin ja pienin arvo B:ssä ovat $\underline{\underline{\sqrt{3} \text{ ja } -\sqrt{3}}}$.

(4)

Huom. Suora ei ole kompakti joukko, koska se ei ole rajoitettu. Se, että suoralla on olemassa piste, jolla on lyhin etäisyys annettuun pisteeseen voidaan todistaa sopivasti valittua suoran kompaktia osajoukkoa käyttäen. Vastaavaa on harjoiteltu jo paljon aikaisemmissa harjoituksissa, tällä kertaa tämä yksityiskohta sivuutetaan. Tätä lyhintä etäisyyttä sanotaan suoran ja annetun pisteen väliseksi etäisyydeksi.

Kuten edellisen viikon tehtävässä 5, voidaan yhtä hyvin etsiä ensin etäisyyden neliön minimi. Tämä yksinkertaistaa laskuja. Pisteen $(2,-1,1)$ etäisyyden neliö pisteeseen (x,y,z) on $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$. Merkitään $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$, $g_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = x+y+z-1$, ja $g_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_2(x,y,z) = x+3y-4$, ja $B = g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0)$. Nyt voidaan soveltaa Lagrangen menetelmän Lauseen 4.39 versiota. Huomataan aluksi, että

$$\nabla g_1(x,y,z) = (1,1,1) \quad \text{ja} \quad \nabla g_2(x,y,z) = (1,3,0)$$

ovat lineaarisesti riippumattomat ($\alpha(1,1,1) + \beta(1,3,0) = (0,0,0)$ vain, kun $\alpha = \beta = 0$). Tällöin piste (x,y,z) voi olla funktion $f|B$ lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) - \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) - \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z) = \bar{0} \quad \text{joillakin } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-2) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2(y+1) - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ 2(z-1) - \lambda_1 = 0 \\ x+y+z-1 = 0 \\ x+3y-4 = 0 \end{cases} \overset{(\lambda_1 = 2(z-1))}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x-4-2z+2-\lambda_2 = 0 \\ 2y+2-2z+2-3\lambda_2 = 0 \\ x+y+z-1 = 0 \\ x+3y-4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x-6z-6 = 3\lambda_2 = 2y-2z+4 \\ x+y+z-1=0 \\ x+3y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-2y-4z = 10 \; \xleftarrow{(4)} \\ x+y+z = 1 \\ x+3y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x+2y = 14 \; \xleftarrow{(-10)} \\ x+y+z = 1 \\ x+3y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -28y = -26 \\ x+y+z = 1 \\ x+3y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4-3y = \frac{56}{14} - \frac{39}{14} = \frac{17}{14} \\ y = \frac{26}{28} = \frac{13}{14} \\ z = 1-x-y = \frac{14}{14} - \frac{17}{14} - \frac{13}{14} = -\frac{16}{14}. \end{cases}$$

Siis $f|B$:n ainoa mahdollinen lokaali ääriarvokohta on $(17/14, 13/14, -16/14)$. Koska, kuten alussa mainittiin, pidetään tunnettuna, että tehtävällä on ratkaisu, sen täytyy olla

$$\sqrt{f\left(\tfrac{17}{14}, \tfrac{13}{14}, -\tfrac{16}{14}\right)} = \sqrt{\left(\tfrac{11}{14}\right)^2 + \left(\tfrac{27}{14}\right)^2 + \left(\tfrac{30}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1750}{196}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7\cdot 5^3}{2\cdot 7\cdot 14}} = 5\sqrt{\frac{5}{14}}.$$

(5) Ratkaistaan ensin tehtävän tasojen leikkaussuora.

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-3y = 4-3t \\ y = t \\ z = 1-x-y = 1-4+3t-t = -3+2t. \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Siis leikkaussuoralla on parametriesitys $(x,y,z) = (4,0,-3)+t(-3,1,2)$, $t\in\mathbb{R}$. Pisteen $(2,-1,1)$ etäisyyden neliö tällaisesta pisteestä on $(2-4+3t)^2 + (-1-t)^2 + (1+3-2t)^2$, merkitään sitä $f(t)$:llä.

$$f'(t) = 2(-2+3t)\cdot 3 + 2(-1-t)(-1) + 2(4-2t)(-2)$$
$$= -12+18t+2+2t-16+8t = -26+28t = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{26}{28} = \frac{13}{14}.$$

$f(t)$	↘	↗
$f'(t)$	−	+
	$\frac{13}{14}$	

Siis f:n pienin arvo on $f\left(\frac{13}{14}\right) = \ldots = \frac{5^3}{14}$. Koska etäisyyden ja sen neliön ääriarvokohdat yhtyvät (vrt. harj 11, teht. 5), kysytty etäisyys on $\sqrt{f\left(\frac{13}{14}\right)} = 5\sqrt{\frac{5}{14}}$.

6 $y'' + ay' + y = 0 \quad (a \in \mathbb{R}). \quad (1)$

Huom. Differentiaaliyhtälöt ratkaistaan aina jollakin (useamman kuin yhden pisteen sisältävällä) välillä, joka myös yleensä pyritään valitsemaan mahdollisimman laajaksi (yleensä kuitenkin avoimeksi väliksi).

(a) $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, missä $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 \neq 0$, $y'(x) = c_1 + 2c_2 x$, $y''(x) = 2c_2$. Tällöin

$$y''(x) + ay'(x) + y(x) = 2c_2 + a(c_1 + 2c_2 x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$
$$= (c_0 + ac_1 + 2c_2) + (c_1 + 2ac_2)x + c_2 x^2,$$

mikä voi olla 0 jollakin välillä vain, jos

$$\begin{cases} c_0 + ac_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 2ac_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \iff c_0 = c_1 = c_2 = 0$$

Siis differentiaaliyhtälöllä (1) ei ole ratkaisuna toisen asteen polynomia (olipa $a \in \mathbb{R}$ mikä hyvänsä).

(b) $y(x) = \sin x + 2\cos x$, $y'(x) = \cos x - 2\sin x$, $y''(x) = -\sin x - 2\cos x$. Tällöin

$$y''(x) + ay'(x) + y(x) = -\sin x - 2\cos x + a\cos x - 2a\sin x + \sin x + 2\cos x$$
$$= a\cos x - 2a\sin x,$$

mikä voi olla 0 jollakin välillä vain jos $a = 0$. Siis (b)-kohdan funktio on differentiaaliyhtälön (1) ratkaisu joss $a = 0$. Tällöin ratkaisuväliksi voidaan valita $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$.