① $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-y)^2-x^4-y^4$. Koska funktio $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ on derivoituva, lokaaleissa ääriarvokohdissa pätee (Lause 4.17)

$$\begin{cases} D_1f(x,y)=2(x-y)-4x^3=0 \\ D_2f(x,y)=2(x-y)(-1)-4y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4x^3 \\ 2x-2y=-4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-2y=4x^3 \\ 4x^3=-4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4x^3 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(1-x^2)=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=1 \\ y=-1. \end{cases}$$

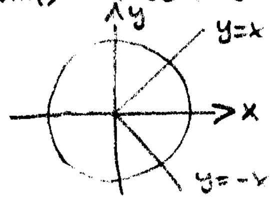
Siis mahdolliset lokaalit ääriarvokohdat ovat: $(0,0)$, $(-1,1)$, ja $(1,-1)$. Koska $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, voidaan tilannetta tutkia lisää Lausee 4.24 avulla. Nyt

$$\mathcal{D}_f(x,y)=D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y)-(D_{12}f(x,y))^2=(2-12x^2)(2-12y^2)-(-2)^2,$$

Koska $\mathcal{D}_f(-1,1)=\mathcal{D}_f(1,-1)=96>0$ ja $D_{11}f(-1,1)=D_{11}f(1,-1)=-10<0$, saa f pisteissä $(-1,1)$ ja $(1,-1)$ lokaalit maksimiarvot $f(-1,1)=2$ ja $f(1,-1)=2$.

Koska $\mathcal{D}_f(0,0)=0$, Lause 4.24 ei kerro onko $(0,0)$ lokaali ääriarvokohta. Asiaa on tutkittava muulla tavalla. Olkoon $0<t<1$. Tällöin

$$f(0,0)=0$$
$$f(t,t)=-2t^4<0$$
$$f(t,-t)=4t^2-2t^4=2t^2(2-t^2)>0.$$



Koska lisäksi jokainen pisteen $(0,0)$ ympäristö sisältää sekä muotoa (t,t), $0<t<1$, että muotoa $(t,-t)$, $0<t<1$, olevia pisteitä, $(0,0)$ ei ole lokaali ääriarvokohta.

② $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-y)^2-x^4-y^4$, ja $A=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ y=x$ tai $y=2x\}$.

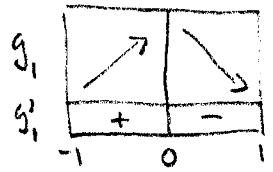
Koska f on jatkuva ja A on kompakti, saa f A:ssa suurimman ja pienimmän arvon (katso luentomoniste). Tätä tietoa ei kuitenkaan tarvita tässä ratkaisussa, sillä tarkastelu palautuu yhden muuttujan funktion tapaukseen, jolloin voidaan soveltaa syksyn kurssin tietoja.

Merkitään $g_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = f(x,x) = -2x^4$, $g_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = f(x,2x) = x^2 - 2x^4$. Koska

$$\{f(x,y) \mid (x,y) \in A\} = \{g_1(x) \mid -1 \le x \le 1\} \cup \{g_2(x) \mid -1 \le x \le 1\}$$

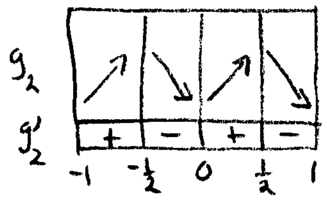
riittää tutkia funktioiden g_1 ja g_2 saamia arvoja (syksyn kurssin tietoja käyttäen).

$$g_1'(x) = -8x^3 = 0 \iff x = 0.$$



Siis g_1:n suurin arvo on $g(0) = \underline{0}$ ja pienin arvo on $\min\{g_1(-1), g_1(1)\} = \underline{-2}$.

$$g_2'(x) = 2x - 8x^3 = 2x(1-4x^2) = 0 \iff x = 0 \text{ tai } x = -\tfrac{1}{2} \text{ tai } x = \tfrac{1}{2}.$$



g_2:n suurin arvo on $\max\{g_2(-\tfrac{1}{2}), g_2(\tfrac{1}{2})\} = \underline{\tfrac{1}{8}}$.
g_2:n pienin arvo on $\min\{g_2(-1), g_2(0), g_2(1)\} = \underline{-1}$.

Vertailemalla edellä olevia alleviivattuja ehdokkaita havaitaan, että funktion f suurin ja pienin arvo joukossa A ovat $\underline{\underline{\tfrac{1}{8}}}$ ja $\underline{\underline{-2}}$.

③ Olkoot suorakulmaisen särmiön sivujen pituudet x, y ja z. Koska särmiön tilavuus on 1, niin $xyz = 1$, joten $z = \frac{1}{xy}$. Tällöin särmiön pinta-alalle A pätee:

$$\begin{aligned} A &= 2xy + 2xz + 2yz = 2xy + 2x \cdot \frac{1}{xy} + 2y \cdot \frac{1}{xy} \\ &= 2xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}, \end{aligned}$$

missä $x > 0$ ja $y > 0$. On siis etsittävä funktion $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2xy + 2/x + 2/y$, pienin arvo mikäli sellainen on olemassa. Koska f on derivoituva, niin lokaaleissa ääriarvokohdissa pätee:

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 2y - \frac{2}{x^2} = 0 \\ D_2 f(x,y) = 2x - \frac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = y^4 \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y(1-y^3)=0 \\ x=\frac{1}{y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Siis funktion f ainoa mahdollinen lokaali ääriarvokohta on $(1,1)$. Jos pidetään tunnettuna, että funktiolla $f:]0,\infty[\times]0,\infty[\to\mathbb{R}$ on pienin arvo, niin edellä olevasta seuraa, että se on $f(1,1)$. Tämä johtuu siitä, että $]0,\infty[\times]0,\infty[$ on avoin, joten pienin arvo saavutetaan lokaalissa ääriarvokohdassa. Kuitenkaan siitä, että kahden (tai useamman) muuttujan funktiolla on vain yksi lokaali ääriarvokohta, joka on lokaali minimikohta ei seuraa, että funktiolla on pienin arvo (vaikka gradientilla olisi vain yksi nollakohta). Esimerkki tästä löytyy ainakin Olli Martion kirjasta Vektorianalyysi, harjoitustehtävä 2.9.7.

Olkoon $A=[\frac{1}{4},4]\times[\frac{1}{4},4]$, A on suljettu ja rajoitettu, joten se on kompakti. Lisäksi $f:]0,\infty[\times]0,\infty[\to\mathbb{R}$ on jatkuva, joten se saa A:ssa pienimmän arvon. Se saavutetaan joko A:n sisäpisteessä, jolloin $\nabla f(x,y)=\bar{0} \iff (x,y)=(1,1)$, tai A:n reunalla ∂A. Koska $f(1,1)=6$ ja $f(x,y)>8$ kaikilla $(x,y)\in\partial A$ (miksi?), f:n pienin arvo A:ssa on 6. Edelleen, $f(x,y)>8$ kaikilla $(x,y)\in]0,\infty[\times]0,\infty[\setminus A$ (miksi?), joten funktion f pienin arvo on $f(1,1)=\underline{\underline{6.}}$

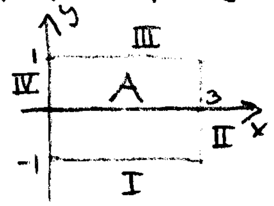
(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-4x+6y^2$, ja $A=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3, -1\le y\le 1\}$.

A on kompakti, koska se on suljettu ja rajoitettu. Lisäksi f on jatkuva, joten sillä on suurin ja pienin arvo A:ssa. Koska f on derivoituva (A:n sisäpisteissä), voidaan käyttää luentomonisteen sivuilla 162–163 esitettyä menetelmää.

(1) $\nabla f(x,y)=\bar{0} \iff \begin{cases} D_1 f(x,y) = 2x-4=0 \\ D_2 f(x,y) = 12y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=0. \end{cases}$

Lisäksi $(2,0)$ on A:n sisäpiste, joten saadaan ehdokas $f(2,0)=\underline{-4.}$

(2) Tutkitaan funktion f arvoja A:n reunalla, jossa käsittely palautuu syksyn kurssista tuttuun yhden muuttujan funktion tilanteeseen.



(I) Merkitään $g(x)=f(x,-1)=x^2-4x+6$, $0\le x\le 3$.

$g'(x)=2x-4=0 \iff x=2.$

Ehdokkaat: $g(0)=\underline{6}$, $g(2)=\underline{2}$ ja $g(3)=\underline{3}$.

(II) Merkitään $g(y) = f(3,y) = -3 + 6y^2$, $-1 \leq y \leq 1$.

$g'(y) = 12y = 0 \iff y = 0$.

Ehdokkaat: $g(-1) = \underline{3}$, $g(0) = \underline{-3}$ ja $g(1) = \underline{3}$.

(III) Tästä saadaan tietenkin samat ehdokkaat kuin kohdasta (I).

(IV) Merkitään $g(y) = f(0,y) = 6y^2$, $-1 \leq y \leq 1$,

$g'(y) = 12y = 0 \iff y = 0$.

Ehdokkaat: $g(-1) = \underline{6}$, $g(0) = \underline{0}$ ja $g(1) = \underline{6}$

(3) Valitaan ehdokkaista suurin ja pienin: $\underline{6}$ ja $\underline{-4}$. Ne ovat siis funktion f suurin ja pienin arvo joukossa A.

Vielä kysyttiin onko f:llä pienin arvo $\mathbb{R}^2$:ssa? Koska

$$f(x,y) = x^2 - 4x + 6y^2 = (x-2)^2 - 4 + 6y^2 \geq -4 \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$f(2,0) = -4$ on funktion f pienin arvo $\mathbb{R}^2$:ssa.

(5) Koska neliöön korotus ja neliöjuuri ovat aidosti kasvavia välillä $[0,\infty[$, saa etäisyys ja sen neliö täsmälleen samoissa pisteissä minimit. Seuraavassa etsitään ensin etäisyyden neliön minimi. Etäisyyttä käyttäen laskuista tulisi mutkikkaammat.

Pisteen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ etäisyyden neliö origosta on x^2+y^2. On siis etsittävä funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, pienin arvo (mikäli sellainen on olemassa) joukossa $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, missä $g(x,y) = 3x + 4y - 7$. Lauseen 4.36 mukaan funktion $f|B$ lokaalit ääriarvokohdat (x,y) toteuttavat:

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = \bar{0} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = \bar{0} \text{ jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ensimmäinen vaihtoehto ei toteudu, koska $\nabla g(x,y) = (3,4) \neq \bar{0}$. Toisesta vaihtoehdosta saadaan:

$$\begin{cases} 2x - \lambda 3 = 0 \\ 2y - \lambda 4 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \lambda = \frac{y}{2} \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \cdot\left(-\tfrac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ (4 + \frac{9}{4})y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{25} \\ y = \frac{28}{25}. \end{cases}$$

Niinpä saadaan ehdokas $f(21/25, 28/25) = 49/25$. Jos pidetään tunnettuna, että funktiolla $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on pienin arvo joukossa B, niin edellä olevasta seuraa, että se on $49/25$. Muussa tapauksessa menetellään seuraavasti. (Tämän voisi tehdä yksinkertaisemmin palauttamalla tilanne yhdenmuuttujan funktion tapaukseen ($y = (7-3x)/4$), mutta tässä tuodaan esille yleistä periaatetta.) Valitaan $A = \{(x,y) \in B \mid -l \leq x \leq l\}$, missä $l > 0$ on kyllin suuri luku, esim. $l = 2$. A on kompakti ja f on jatkuva, joten $f|B$ saa A:ssa pienimmän arvon. Se saavutetaan joko pisteissä (i) $\{(x,y) \in B \mid -l < x < l\}$ tai (ii) $\{(x,y) \in B \mid x = -l$ tai $x = l\}$. Tapauksessa (i) kyseeseen tulevat vain funktion $f|B$ lokaalit ääriarvot (katso lauseessa 4.36 annettu määritelmä). Tapaus (ii) ei tule kysymykseen, koska l valittiin kyllin suureksi. Siis funktion $f|B$ pienin arvo joukossa A on $49/25$. Koska l valittiin kyllin suureksi, pätee: $f|B(x,y) > 49/25$ kaikille $(x,y) \in B \setminus A$. Siis funktiolla $f|B$ on pienin arvo, joka on $49/25$. Niinpä vastaus tehtävän kysymykseen on $\sqrt{49/25} = \underline{\underline{7/5}}$.

6. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4$. Merkitään $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(Koska A on kompakti ja f on jatkuva, saa f suurimman ja pienimmän arvon A:ssa, mutta tätä tietoa ei varsinaisesti tarvita jatkossa.) Siirrytään napakoordinaatistoon

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

missä $r \in [0, \infty[$ ja $\varphi \in [0, 2\pi]$. Nyt $(x,y) \in A$ joss $r = 1$, joten

$$\{f(x,y) \mid (x,y) \in A\} = \{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Siis annettu tehtävä on muunnettu funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\varphi) = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi$, suurimman ja pienimmän arvon etsimiseksi joukossa $[0, 2\pi]$. Syksyn kurssin tietojen perusteella g:llä on suurin ja pienin arvo joukossa $[0, 2\pi]$ ja ne saavutetaan joko pisteistä $\varphi \in]0, 2\pi[$, joissa $g'(\varphi) = 0$, tai pisteissä $\{0, 2\pi\}$.

$$g'(\varphi) = 4\cos^3\varphi(-\sin\varphi) + 4\sin^3\varphi\cos\varphi = 4\cos\varphi\sin\varphi(-\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \text{ tai } \sin\varphi = 0 \text{ tai } \tan\varphi = \pm 1 \quad (|\cos\varphi| = |\sin\varphi|).$$

Ehdokkaat ovat siis: $g(\pi/2) = g(3\pi/2) = 1$, $g(\pi) = 1$, $g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{5\pi}{4}) = g(\frac{3\pi}{4}) = g(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ ja $g(0) = g(2\pi) = 1$. Siis funktion f suurin ja pienin arvo yksikköympyrällä A ovat $\underline{\underline{1 \text{ ja } \frac{1}{2}}}$.