① Huomaa, että joukko $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0 \text{ ja } y>0\}$ on avoin, joten jokainen sen piste on sisäpiste. Koska f on derivoituva, niin piste $(x,y)\in A$ voi olla lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = y+2-\dfrac{2xy}{x^2y} = 0 \\ D_2 f(x,y) = x - \dfrac{x^2}{x^2y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+2-\dfrac{2}{x} = 0 \\ x-\dfrac{1}{y} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 1/y \\ y+2-2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Siis piste $(1/2, 2)$ on funktion f ainoa mahdollinen ääriarvokohta. Koska $f\in C^2(A)$ tilannetta voidaan tutkia lisää Lauseen 4.24 avulla. Nyt

$$D_{11}f(x,y) = \frac{2}{x^2}, \quad D_{22}f(x,y) = \frac{1}{y^2} \quad \text{ja} \quad D_{12}f(x,y) = 1,$$

joten

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_f(1/2,2) &= D_{11}f(1/2,2)\,D_{22}f(1/2,2) - (D_{12}f(1/2,2))^2 \\ &= 8\cdot\frac{1}{4} - 1^2 = 2-1 = 1 > 0. \end{aligned}$$

Siksi $(1/2,2)$ on lokaali ääriarvokohta. Koska lisäksi $D_{11}f(1/2,2)>0$, kyseessä on lokaali minimikohta, jossa f saa lokaalin minimin $f(\frac{1}{2},2) = \frac{1}{2}\cdot 2 + 2\cdot\frac{1}{2} - \ln((\frac{1}{2})^2 2) = 2-\ln(2^{-1}) = 2+\ln 2.$

② Koska $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ on derivoituva, niin piste $x\in\mathbb{R}^4$ voi olla lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases} D_1 f(x) = -2x_1+24 = 0 \\ D_2 f(x) = -4x_2+6 = 0 \\ D_3 f(x) = -6x_3+48 = 0 \\ D_4 f(x) = -6x_4+72 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 3/2 \\ x_3 = 8 \\ x_4 = 12. \end{cases}$$

Siis ainoa mahdollinen ääriarvokohta on $x=(12, 3/2, 8, 12)$. Koska $f\in C^2(\mathbb{R}^4)$, tilannetta voidaan tutkia lisää Lauseiden 4.19 ja 4.22 avulla.

<u>Tapa I</u> (Lausetta 4.19 käyttäen). Funktion f Hessen matriisi on

$$H(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Koska matriisille $-H(x)$ pätee: $d_1 = 2 > 0$, $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 0\cdot 0 = 8 > 0$,

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 6 = 48 > 0 \text{ ja}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 6 = 288 > 0$$

niin $H(x)$ on negatiivisesti definiitti kaikilla $x \in \mathbb{R}^4$ (Lause 3.5(ii)). Siis f on (vahvasti) konkaavi $\mathbb{R}^4$:ssa (Lause 4.12 (iv)). Siksi funktio f saa Lauseen 4.19 perusteella pisteessä $x = (12, 3/2, 8, 12)$ lokaalin ja globaalin maksimin $f(12, 3/2, 8, 12) = 772\frac{1}{2}$.

Tapa II. (Tämä on mutkikkaampi, mutta yleisemmin toimiva tapa.) Edellä esitetyt laskelmat osoittavat Lauseen 4.22 perusteella, että $(12, 3/2, 8, 12)$ on lokaali maksimikohta. Vielä pitää tutkia onko f:llä suurinta arvoa. Merkitään $A_\ell = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_i| \le \ell$ kaikilla $i \in \{1, \dots, 4\}\}$, missä $\ell > 0$. Osoitetaan ensin, että kun ℓ on kyllin suuri, niin $f(x) < 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^4 \setminus A_\ell$. Merkitään $M_x = \{|x_i| : i \in \{1, \dots, 4\}\}$, missä $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Nyt

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 + 24x_1 + 6x_2 + 48x_3 + 72x_4 \\ &\le -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 72|x_1| + 72|x_2| + 72|x_3| + 72|x_4| \\ &\le -M_x^2 + 4\cdot 72 M_x = M_x(-M_x + 288). \end{aligned}$$

Siis, kun $M_x > 288$, niin $f(x) < 0$. Kun $x \in \mathbb{R}^4 \setminus A_{300}$, niin $|x_i| > 300$ jollakin $i \in \{1, \dots, 4\}$, jolloin $M_x > 288$. Niinpä

$$f(x) < 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}^4 \setminus A_{300}.$$

Toisaalta joukko A_{300} on suljettu ja rajoitettu, joten se on kompakti. Niinpä Lauseen 4.27 mukaan jatkuva funktio f saa joukossa A_{300} suurimman (ja pienimmän) arvon. Se (ne) saavutetaan joko A_{300}:n reunalla ∂A_{300} tai A_{300}:n sisäpisteessä. Koska f on derivoituva, niin sisäpisteistä tulevat kysymykseen vain ne, joissa $\nabla f(x) = \bar{0}$. Siis sisäpisteistä saadaan yksi ehdokas $f(12, 3/2, 8, 12) = 772\frac{1}{2}$ suurimmaksi arvoksi. Toisaalta, koska $M_x = 300$ kaikilla $x \in \partial A_{300}$, niin $f(x) < 0$ kaikilla $x \in \partial A_{300}$. Niinpä funktion f suurin arvo joukossa A_{300} on $772\frac{1}{2}$. Koska lisäksi $f(x) < 0 < 772\frac{1}{2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^4 \setminus A_{300}$, niin f:llä on suurin arvo ($\mathbb{R}^4$:ssa), joka on $772\frac{1}{2}$.

(3) Koska $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$, on derivoituva, niin Lauseen 4.17 mukaan piste $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ voi olla f:n lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 24x^2 - 24y = 0 \\ D_2 f(x,y) = -24x + 3y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -8x + y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8x + (x^2)^2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x(-8 + x^3) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Nyt $\mathcal{D}_f(x,y) = D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y) - (D_{12}f(x,y))^2 = 48x \cdot 6y - (-24)^2$. Koska $\mathcal{D}_f(0,0) = -576 < 0$, niin $(0,0)$ ei ole ääriarvokohta (Lause 4.24). Koska $\mathcal{D}_f(2,4) = 1728 > 0$, niin $(2,4)$ on ääriarvokohta (Lause 4.24). Koska $D_{11}f(2,4) = 96 > 0$, $f(2,4) = -64$ on f:n lokaali minimi (Lause 4.24).

(4) Koska $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 8y^3 + y^4$, on derivoituva, niin Lauseen 4.17 mukaan piste $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ voi olla f:n lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 8x + 4y = 0 \\ D_2 f(x,y) = 4x + 2y + 24y^2 + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y/2 \\ 4y^2(6+y) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = 3 \\ y = -6. \end{cases}$$

Siis $(0,0)$ ja $(3,-6)$ ovat ainoat mahdolliset lokaalit ääriarvokohdat. Nyt $\mathcal{D}_f(x,y) = D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y) - (D_{12}f(x,y))^2 = 8(2 + 48y + 12y^2) - 4^2$. Koska $\mathcal{D}_f(0,0) = 0$, Lause 4.24 ei kerro onko $(0,0)$ lokaali ääriarvokohta. Asiaa on tutkittava muulla tavalla.

$$f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 8y^3 + y^4 = (2x+y)^2 + 8y^3 + y^4$$
$$= (2x+y)^2 + y^3(8+y).$$

Siis

$f(0,0) = 0$

$f(-y/2, y) > 0$, kun $y > 0$, ja

$f(-y/2, y) < 0$, kun $-8 < y < 0$.

Niinpä, koska jokainen origon ympäristö sisältää muotoa $(-y/2, y)$, $y > 0$, ja $(-y/2, y)$, $-8 < y < 0$, olevia pisteitä, ei $(0,0)$ ole lokaali ääriarvokohta. Koska $\mathcal{D}_f(3,-6) = 1152 > 0$, $(3,-6)$ on lokaali ääriarvokohta. Koska lisäksi $D_{11}f(3,-6) = 8 > 0$, $f(3,-6) = -432$ on lokaali minimi.

(5) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 4y^2 - 27x$. Kuten tehtävissä 3 ja 4, lokaaleissa ääriarvokohdissa pätee

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 27 = 0 \\ D_2 f(x,y) = 4xy + 8y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 27 \\ 4y(x+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = -2 \\ y = \sqrt{15/2} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\sqrt{15/2} \end{cases}$$

Nämä ovat siis f:n ainoat mahdolliset ääriarvokohdat. Nyt $\mathcal{D}_f(x,y) = D_{11} f(x,y) D_{22} f(x,y) - (D_{12} f(x,y))^2 = 6x(4x+8) - (4y)^2 = 24x^2 + 48x - 16y^2$. Koska $\mathcal{D}_f(3,0) = 360 > 0$, $\mathcal{D}_f(-3,0) = 72 > 0$ ja $\mathcal{D}_f(-2, \pm\sqrt{15/2}) = -120 < 0$, pisteet $(\pm 3, 0)$ ovat ääriarvokohtia ja pisteet $(-2, \pm\sqrt{15/2})$ eivät ole. Koska $D_{11} f(3,0) = 18 > 0$ ja $D_{11} f(-3,0) = -18 < 0$, $f(3,0) = -54$ on lokaali minimi ja $f(-3,0) = 54$ on lokaali maksimi.

(6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{8}{3}x^3 + 4y^3 - x^4 - y^4$. Etsitään aluksi funktion f mahdolliset lokaalit ääriarvokohdat. Koska f on derivoituva, niin $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ voi olla lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 8x^2 - 4x^3 = 0 \\ D_2 f(x,y) = 12y^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2(2-x) = 0 \\ 4y^2(3-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Ehdokkaat lokaaleiksi ääriarvoiksi ovat siis $f(0,0) = 0$, $f(0,3) = 27$, $f(2,0) = 5\frac{1}{3}$ ja $f(2,3) = 32\frac{1}{3}$.

Merkitään $A_\ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \ell \text{ ja } |y| \le \ell\}$, missä $\ell > 0$. Osoitetaan, että kun ℓ on kyllin suuri, niin $f(x,y) < 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_\ell$. Merkitään $M_{x,y} = \max\{|x|, |y|\}$. Nyt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \tfrac{8}{3}x^3 + 4y^3 - x^4 - y^4 \le \tfrac{8}{3}|x|^3 + 4|y|^3 - x^4 - y^4 \\ &\le 4|x|^3 + 4|y|^3 - x^4 - y^4 \le 4M_{x,y}^3 + 4M_{x,y}^3 - x^4 - y^4 \\ &\le 8M_{x,y}^3 - M_{x,y}^4 = M_{x,y}^3(8 - M_{x,y}). \end{aligned}$$

Siis $f(x,y) < 0$, kun $M_{x,y} > 8$. Kun $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A_8$, niin $|x| > 8$ tai $|y| > 8$, joten $M_{x,y} > 8$. Niinpä

$$f(x,y) < 0 \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_8.$$

Toisaalta joukko A_8 on suljettu ja rajoitettu, joten se on kompakti. Niinpä Lauseen 4.27 mukaan jatkuva funktio f saa joukossa A_8 suurimman arvon. Se saavutetaan joko A_8:n reunalla ∂A_8 tai A_8:n sisäpisteissä. Koska f on derivoituva, niin sisäpisteistä tulevat kysymykseen vain ne, joissa $\nabla f(x,y) = \bar{0}$. Edellä olevien laskujen perusteella saadaan ehdokas $f(2,3) = 32\frac{1}{3}$. Edellä olevat laskelmat osoittavat myös että $f(x,y) < 0$ kaikilla $(x,y) \in \partial A_8$. Niinpä f:n suurin arvo joukossa A_8 on $32\frac{1}{3}$. Koska lisäksi $f(x,y) < 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_8$, niin f:llä on suurin arvo ($\mathbb{R}^2$:ssa), joka on $32\frac{1}{3}$.

Huom. Jos pidetään tunnettuna, että f:llä on suurin arvo (määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}^2$), niin riittää etsiä ∇f:n nollakohdat ja valita näissä pisteissä saatu suurin arvo. Tämä siksi, että f on derivoituva ja suurin arvo saavutetaan tarkastellavan joukon sisäpisteessä (kaikki $\mathbb{R}^2$:n pisteet ovat sisäpisteitä), joten se on myös lokaali ääriarvo.