① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2x^2+1} + \sin(3x)$.

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{x}{2x^2+1} + \sin(3x)\right) dx = \int \frac{x}{2x^2+1}\,dx +$
$\int \sin(3x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+1}\,dx + \frac{1}{3}\int 3\sin(3x)\,dx =$
$\frac{1}{4}\int \frac{D(2x^2+1)}{2x^2+1}\,dx + \frac{1}{3}\int D(-\cos(3x))\,dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2+1) +$
$\frac{1}{3}(-\cos(3x)) + C = \frac{1}{4}\ln(2x^2+1) - \frac{1}{3}\cos(3x) + C$,

missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja $x \in]-\infty, \infty[$. Ensimmäinen integrointi perustui luentomonisteen kaavaan $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$ (oletetaan, että $f(x) \neq 0$ tarkasteltavalla välillä).

Lisäksi vaaditaan, että $F(0) = 1$, jolloin $\frac{1}{4}\ln(1) - \frac{1}{3}\cos(0) + C = 1$
$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Vastaus: $F(x) = \frac{1}{4}\ln(2x^2+1) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{4}{3}$, $x \in]-\infty, \infty[$.

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{kun } x < -1, \text{ ja} \\ 2^{-x}, & \text{kun } x \geq -1. \end{cases}$

Jos $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on f:n integraalifunktio, niin kun $x < -1$, pätee

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int -2x\,dx = -x^2 + C_1,$$

missä $C_1 \in \mathbb{R}$ on vakio. Vastaavasti, kun $x \geq -1$, pätee

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int 2^{-x}\,dx = \int 2^{(-1)x}\,dx = \int (2^{-1})^x\,dx$$
$$= \frac{1}{\ln(2^{-1})}(2^{-1})^x + C_2 = -\frac{1}{\ln(2)}2^{-x} + C_2,$$

missä $C_2 \in \mathbb{R}$ on vakio. Tässä käytettiin monisteen kaavaa
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Siis

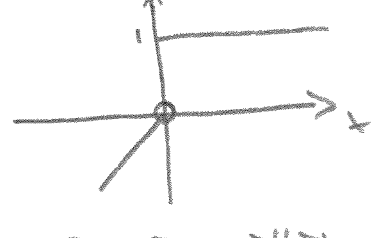
$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1, & \text{kun } x < -1, \text{ ja} \\ -\frac{1}{\ln(2)} 2^{-x} + C_2, & \text{kun } x \geq -1. \end{cases}$$

Koska derivoituva funktio on jatkuva, täytyy F:n olla jatkuva pisteessä $x = -1$. Siksi $\lim_{x \to -1-} F(x) = \lim_{x \to -1+} F(x) = F(-1)$ eli $-1 + C_1 = -\frac{2}{\ln(2)} + C_2$ eli $C_2 = \frac{2}{\ln(2)} - 1 + C_1$. Niinpä (merkitään $C = C_1$)

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + C, & \text{kun } x < -1, \text{ ja} \\ -\frac{1}{\ln(2)} 2^{-x} + \frac{2}{\ln(2)} - 1 + C, & \text{kun } x \geq -1. \end{cases} \qquad (1)$$

Nyt $F'(x) = f(x)$ ainakin, kun $x \neq -1$. Derivoituvuustestin perusteella F on derivoituva myös pisteessä $x = -1$ ja $F'(-1) = f(-1)$, sillä F on jatkuva pisteessä $x = -1$ ja $\lim_{x \to -1-} F'(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = f(-1) = \lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} F'(x)$. Siis $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in]-\infty, \infty[$.
Niinpä <u>f:n integraalifunktiot ovat kaavan (1) antamat funktiot.</u>

③ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0, \text{ ja} \\ x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$



<u>Tapaus: $I \subset [0, \infty[$.</u> Tällöin $f|I$:llä on integraalifunktiot $\int 1 \, dx = x + C$, missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja $x \in I$.

<u>Tapaus: $I \subset]-\infty, 0[$.</u> Tällöin $f|I$:llä on integraalifunktiot $\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$, missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja $x \in I$.

Muut tapaukset. Nyt $]-a,a[\subset I$ jollakin $a>0$.

Tapa 1. Koska $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0+} f(x)$, on funktiolla $f|I$ pisteessä $x=0$ ns. hyppäysepäjatkuvuus. Siksi $f|I$ ei ole minkään funktion derivaatta eli sillä ei ole integraalifunktiota.(*)

Tapa 2. Jos $F: I \to \mathbb{R}$ on $f|I$:n integraalifunktio, niin

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & \text{kun } x \in I \cap [0,\infty[, \text{ ja} \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2, & \text{kun } x \in I \cap]-\infty, 0[, \end{cases}$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Koska derivoituva funktio on jatkuva, täytyy olla $F(0) = \lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0-} F(x)$ eli $C_1 = C_2$. Nyt (merkitään $C = C_1 = C_2$)

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(0+h) - F(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0+} \frac{h + C - C}{h} = 1 \quad \text{ja}$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{F(0+h) - F(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1}{2}h^2 + C - C}{h} = \lim_{h\to 0-} \tfrac{1}{2}h = 0.$$

Koska nämä toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret, F ei ole derivoituva pisteessä $x=0$. Niinpä integraalifunktiota $F: I \to \mathbb{R}$ ei ole olemassa.

4 Osittaisintegroimalla kolme kertaa saadaan

$$\int x^3 e^x\,dx = x^3e^x - \int 3x^2 e^x\,dx = x^3 e^x - \left(3x^2e^x - \int 6xe^x\,dx\right)$$
$$= (x^3 - 3x^2)e^x + \int 6xe^x\,dx = (x^3-3x^2)e^x + 6xe^x - \int 6e^x\,dx$$
$$= (x^3-3x^2)e^x + 6xe^x - 6e^x + C = \underline{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C},$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio.

(Tarkistus: $D((x^3-3x^2+6x-6)e^x + C) = (3x^2 - 6x + 6)e^x + (x^3-3x^2+6x-6)e^x = x^3e^x$.)

(*) Tämä tosiasia on mainittu monisteessa ilman todistusta, sen todistus perustuu Väliarvolauseeseen.

(5) Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int x(\sin x+\cos x)\,dx = x(-\cos x+\sin x) - \int 1\cdot(-\cos x+\sin x)\,dx =$$
$$x(-\cos x+\sin x) + \int \cos x\,dx - \int \sin x\,dx = x(-\cos x+\sin x)+\sin x+\cos x+C =$$
$$\underline{(1-x)\cos x + (1+x)\sin x + C},$$ missä $C\in\mathbb{R}$ on vakio.

(Tarkistus: $D\big((1-x)\cos x+(1+x)\sin x + C\big) = -\cancel{\cos x} - (1-x)\sin x + \cancel{\sin x} + (\cancel{1}+x)\cos x = x(\sin x+\cos x)$.)

(6)

$$\int e^{3x}\cos(4x)\,dx = e^{3x}\frac{\sin(4x)}{4} - \int 3e^{3x}\frac{\sin(4x)}{4}\,dx$$
$$= e^{3x}\frac{\sin(4x)}{4} - \left(3e^{3x}\frac{(-\cos(4x))}{16} - \int 9e^{3x}\frac{(-\cos(4x))}{16}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin(4x) + \frac{3}{16}e^{3x}\cos(4x) - \frac{9}{16}\int e^{3x}\cos(4x)\,dx.$$

Huomaa, että merkintä $\int f(x)dx$ edustaa mitä tahansa f:n integraalifunktiota. Siksi, varsin hämäävästi, esimerkiksi $\int f(x)dx - \int f(x)dx$ ei ole nolla, vaan mikä tahansa vakio.(*) Siis

$$\overbrace{\left(1+\frac{9}{16}\right)}^{=25/16}\int e^{3x}\cos(4x)\,dx = \frac{1}{4}e^{3x}\sin(4x)+\frac{3}{16}e^{3x}\cos(4x) + C_1 \iff$$

$$\underline{\int e^{3x}\cos(4x)\,dx = \frac{4}{25}e^{3x}\sin(4x) + \frac{3}{25}e^{3x}\cos(4x) + C},$$

missä C ja C_1 ovat reaalivakioita ($C = \frac{16}{25}C_1$).

(Tarkistus: $D\left(\frac{4}{25}e^{3x}\sin(4x)+\frac{3}{25}e^{3x}\cos(4x)+C\right) =$
$\frac{12}{25}e^{3x}\sin(4x) + \frac{16}{25}e^{3x}\cos(4x) + \frac{9}{25}e^{3x}\cos(4x) - \frac{12}{25}e^{3x}\sin(4x) =$
$e^{3x}\cos(4x)$.)

(*) Ei tämäkään ole ihan täsmällistä. Jos halutaan olla täsmällisiä, niin $\int f(x)dx$ määritellään kaikki f:n integraalifunktiot sisältäväksi joukoksi. (Tällöin pitää määritellä mm. tällaisten joukkojen yhteenlasku.)