Tilastollisen päättelyn kurssi — Harjoitukset 9 (13.2.2009)

1. Luentomonisteen sivuilla 67 ja 71 vedotaan tulokseen: Jos T noudattaa gammajakaumaa $\mathsf{G}(n, \lambda)$, niin $2\lambda T$ noudattaa χ^2_{2n}–jakaumaa. Todista tulos. Vihje1: Käytä tiheysfunktion muunnoskaavaa $f_{aX+b}(y) = |a|^{-1} f_X(\frac{y-b}{a})$, jossa X on alkuperäinen satunnaismuuttuja, a ja b ovat reaalilukuja ja uusi satunnaismuuttuja $Y = aX + b$ (ja y on sen numeerinen arvo). Vihje2: Gamma- ja χ^2–jakaumien tiheysfunktiot ovat luentomonisteen sivulla 89.

2. Luentojen kohdan 2.4.6 koeasetelmassa A saadaan otokseen ($n = 50$) genotyyppejä rr, rR ja RR vastaavasti 4, 20 ja 26 yksilöä. Laske parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti ja testaa kaksisuuntaisella Waldin testillä hypoteesia $H_0 : \theta = 0.2$.

3. Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ on riippumaton otos jatkuvasta jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(y; \theta) = 2\theta^{-1} y \exp(-y^2/\theta)$, $y > 0$, ja jossa θ on positiivinen parametri. Johda parametrille θ reaalinen tyhjentävä tunnusluku.

4. Tarkastellaan edellisen tehtävän mallia. Halutaan testata nollahypoteesia $H_0 : \theta = 2$ vastaan $H_1 : \theta > 2$. Perustele, että tasaisesti voimakkaimman testin kriittinen alue on muotoa $\left\{ \boldsymbol{y} : \sum_i y_i^2 \geq c \right\}$, jossa $c > 0$ on valitusta merkitsevyystasosta riippuva vakio.

5. Eräiden kuulalaakereiden kestoa (miljoonaa kierrosta) on totuttu kuvaamaan Weibull-jakaumalla, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \beta, \lambda) = \lambda \beta y^{\beta - 1} \exp(-\lambda y^\beta), \qquad y > 0,$$

ja jossa β ja λ ovat positiivisia parametreja. Halutaan testata hypoteesia $H_0 : \beta = 1$ eli tutkia, voisiko kestoa kuvata eksponenttijakaumalla. Poimitaan 23 laakerin otos ja mitataan niiden kestot:

17.88	28.92	33.00	41.52	42.12	45.60	48.48	51.84
51.96	54.12	55.56	67.80	68.64	68.64	68.88	84.12
93.12	98.64	105.12	105.84	127.92	128.04	173.40	

Suorita testi käyttämällä uskottavuusosamäärän testisuuretta ja χ^2-approksimaatiota. [*Apu.* "Vapaan mallin" SU-estimaatteja ei voi ratkaista suljetussa muodossa, mutta uskottavuusyhtälöt numeerisesti ratkaisemalla nähdään, että $\hat{\beta} = 2.1021$ ja $\hat{\lambda} = 9.515 \cdot 10^{-5}$.]