Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 9, 7.5.2009

1. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinat kuten lauseessa 9.1. Osoita, että jos on olemassa positiiviset vakiot $h'_1, \ldots, h'_K$ ja positiivinen satunnaismuuttuja f siten, että

$$u'_k(U_k - \bar{X}_k) = h'_k f$$

melkein varmasti kaikilla $k = 1, \ldots, K$, niin $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi.

2. Olkoon $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ jälleenvakuutusmarkkinoiden tasapainotila. Osoita, että $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi.

3. Tarkastellaan esimerkin 9.1 mukaista tasapainotilaa jälleenvakuutusmarkkinoilla. Olkoon $X = X_1 + \cdots + X_K$ markkinoiden vastuulla oleva kokonaiskorvausmäärä ja Y mielivaltainen positiivinen satunnaismuuttuja, jolla on äärellinen varianssi. Olkoot

$$R = \frac{Y}{\mathbb{E}(\bar{\phi}Y)} - 1 \text{ ja } R^* = \frac{X}{\mathbb{E}(\bar{\phi}X)} - 1$$

satunnaismuuttujien Y ja X tuottoasteet. Osoita, että

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{C}ov(R, R^*)}{\mathbb{V}ar(R^*)}\,\mathbb{E}(R^*).$$

4. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \alpha_k z + \beta_k, \;\; z \in \mathbb{R},$$

missä $\alpha_k > 0$ ja $\beta_k \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, $k = 1, \ldots, K$. Osoita, että kaikki clearing-ehdon täyttävät allokoinnit ovat Pareto-optimaalisia.

5. (jatkoa) Määrää kaikki markkinoiden tasapainotilat.