Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 8, 30.4.2009

1. Olkoon markkinoilla N riskillistä arvopaperia. Odotustuottoa r vastaava minimaalinen tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = a(r - r_0)^2 + \sigma_0^2,$$

missä a, r_0 ja σ_0 ovat positiivisia vakioita. Lisätään markkinoille arvopaperi $N + 1$, jonka odotustuotto on suurempi kuin r_0 ja tuottoaste stokastisesti riippumaton markkinoiden muiden arvopapereiden tuottoasteista. Olkoon $r > r_0$. Osoita, että syntyneillä markkinoilla on mahdollista konstruoida allokointi, jonka tuottoasteen odotusarvo on r ja varianssi pienempi kuin $\sigma^2(r)$.

2. Olkoot markkinoilla arvopaperit $1, \ldots, N$ ja näiden hetken yksi arvot $S_1(1), \ldots, S_N(1)$. Olkoot hetken nolla hinnat $S_1(0), \ldots, S_N(0)$ positiivisia ja olkoon $S_N(1)$ lineaarisesti riippuva muista arvopapereista. Toisin sanoen on olemassa sellaiset $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}$, että

$$S_N(1) = \alpha_1 S_1(1) + \cdots + \alpha_{N-1} S_{N-1}(1) \quad \text{m.v.}$$

Oletetaan, että $S_N(0) = \alpha_1 S_1(0) + \cdots + \alpha_{N-1} S_{N-1}(0)$. Osoita, että tehokkaat varianssi-/odotustuottoparit eivät muutu, jos arvopaperi N poistetaan markkinoilta.

3. Oletetaan, että riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä ja että odotustuotot eivät ole kaikki samoja. Olkoon

$$\sigma(r) = \sqrt{a(r - r_0)^2 + \sigma_0^2} \qquad (*)$$

tehokkaita riskillisten arvopapereiden allokointeja vastaava hajonta odotustuoton r funktiona. Olkoon $s > r_0$. Tarkastellaan käyrän $(*)$ pisteen $(\sigma(s), s)$ kautta kulkevaa tangenttia. Olkoon $(0, f(s))$ tangentin ja r-akselin leikkauspiste. Osoita, että $\lim_{s \to \infty} f(s) = r_0$.

Olkoon $i < r_0$. Todista, että käyrällä $(*)$ on pisteen $(0, i)$ kautta kulkeva tangentti, jonka kulmakerroin on positiivinen.

4. Markkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ (arvopaperi 1) ja lisäksi riskilliset arvopaperit $2, \ldots, N$. Arvopaperin n lukumäärä on L_n, $n = 1, \ldots, N$. Olkoon markkinoiden hinnoittelija ϕ muotoa $\phi = a + bA(1)$, missä a ja b ovat vakioita ja $A(1)$ on markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1. Osoita, että

$$\mathbb{E}(R_n) = i + \frac{\mathbb{C}ov(R_n, R^*)}{\mathbb{V}ar(R^*)}(\mathbb{E}(R^*) - i), \quad n = 1, \ldots, N, \qquad (**)$$

missä R_n arvopaperin n tuottoaste ja R^* riskillisten arvopapereiden kokonaistutottoaste.

5. Olkoot markkinat muuten kuten edellisessä tehtävässä, mutta hinnoittelija olkoon muotoa $\phi = g(A(1))$, missä g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio. Oletetaan lisäksi, että riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden yhteisjakauma on multinormaalinen (jolloin tunnetusti parilla (R_n, R^*) on kaksiulotteinen normaalijakauma kaikilla n). Osoita, että tulos $(**)$ pätee. Tehtävässä oletetaan tunnetuksi ns. Steinin lemma: jos (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa ja g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio, niin

$$\mathbb{C}ov(X, g(Y)) = \mathbb{C}ov(X, Y)\mathbb{E}(g'(Y)).$$