

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 6, 16.4.2009

1. Olkoot markkinoilla arvopaperit $1, \dots, N$ ja näihin liittyvät hetken yksi arvot

$$S_1(1), \dots, S_N(1).$$

Arvopaperi 1 on bondi, jolle $S_1(1) \equiv 1$. Olkoot arvopapereiden lukumäärät L_1, \dots, L_N .

Markkinoilla on K toimijaa. Sallittua allokoointia $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ sanotaan Pareto-optimaaliseksi varianssin suhteen, ellei ole sellaista sallittua allokoointia $(\theta^1, \dots, \theta^K)$, että

$$\mathbb{V}(S(1)\theta^k) \leq \mathbb{V}(S(1)\bar{\theta}^k)$$

kaikilla $k = 1, \dots, K$ siten, että erisuuruus on aito vähintään yhdellä toimijalla. Osoita, että $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen edellä esitetyssä mielessä, jos on olemassa sellaiset positiiviset vakiot h_1, \dots, h_K ja satunnaismuuttuja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, että $S(1)\bar{\theta}^k = h_k f$ kaikilla $k = 1, \dots, K$.

2. (jatkoa) Olkoon $A(1)$ markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1 ja $\mu_1, \dots, \mu_K \in (0, \infty)$ sellaisia, että

$$\mu_1 + \dots + \mu_K = \mathbb{E}(A(1)).$$

Osoita, että on olemassa varianssin suhteen Pareto-optimaalinen allokointi $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$, joka täyttää ehdon

$$\mathbb{E}(S(1)\bar{\theta}^k) = \mu_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

3. Markkinoilla on N arvopaperia. Arvopaperi 1 on bondi ja muut ovat aidosti riskillisiä. Arvopaperin n hetken yksi arvo on $S_n(1)$ ja lukumäärä $L_n, \forall n$. Markkinoilla on $K \geq 2$ toimijaa, joiden salkut alkutilanteessa ovat $\eta^k, k = 1, \dots, K$. Toimijan 1 utiliteettifunktio määräytyy ehdosta $u_1(z) = az + b, z \in \mathbb{R}$, missä a ja b ovat positiivisia vakioita. Toimijan k utiliteettifunktio u_k on aidosti konkaavi, $k = 2, \dots, K$. Osoita, että markkinoilla on sellainen tasapainotila, jossa toimijan k salkku muodostuu pelkästään bondeista, $\forall k \geq 2$.

4. Markkinoilla on arvopaperit $1, \dots, N$ ja näihin liittyvät hetken yksi arvot

$$S_1(1), \dots, S_N(1).$$

Markkinoilla on $K \geq 1$ identtistä toimijaa ts. salkut alkutilanteessa ja utiliteettifunktiot ovat samat kaikilla toimijoilla. Osoita, että markkinoilla on tasapainotila, kun yhteinen utiliteettifunktio oletetaan aidosti kasvavaksi ja konkaaviksi.

5. (lauseen 7.2 eräänlainen käänteistulos) Olkoot markkinoilla arvopaperit $1, \dots, N$ ja toimijat $1, \dots, K$. Olkoot salkut alkutilanteessa $\eta^1, \dots, \eta^K, \bar{S}(0)$ hintavektori ja $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ sallittu allokointi. Oletetaan, että $\bar{S}(0)\eta^k = \bar{S}(0)\bar{\theta}^k$ ja että

$$\bar{S}_n(0) = \frac{\mathbb{E}(S_n(1)u'_k(S(1)\bar{\theta}^k))}{\mathbb{E}(u'_k(S(1)\bar{\theta}^k))} \bar{S}_1(0), \quad \forall n = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K.$$

Osoita, että $(\bar{S}(0), \bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ on tasapainotila.