Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 4, 26.3.2009

1. Tarkastellaan kahden periodin arbitraasivapaita markkinoita. Olkoot Q_1 ja Q_2 kaksi markkinoiden riskineutraalia todennäköisyysmittaa. Satunnaismuuttuja Y voidaan *toistaa*, jos on olemassa sellainen omavarainen strategia $\{\theta(1), \theta(2)\}$, että $S(2)\theta(2) = Y$ m.v. Tarkastellaan tilannetta, jossa toistettavissa oleva Y liitetään markkinoille uudeksi arvopaperiksi. Todista, että

$$\mathbf{E}_{Q_1}\left(\frac{Y}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\right) = \mathbf{E}_{Q_2}\left(\frac{Y}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\right)$$

ts. Y:llä on tasan yksi arbitraasivapaa hinta.

2. (jatkoa) Oletetaan, että markkinat ovat *täydelliset* ts. kaikki satunnaismuuttujat voidaan toistaa. Osoita, että riskineutraaleja todennäköisyysmittoja on tasan yksi.

3. Olkoot arvopaperimarkkinat kuten kohdassa 5.3. Oletetaan, että markkinoiden hinnoittelua kontrolloi riskineutraali todennäköisyysmitta Q. Lisätään markkinoille arvopaperi $N+1$, jonka arvo hetkellä T on eräs $\mathcal{F}$-mitallinen satunnaismuuttuja $S_{N+1}(T)$. Määritellään kyseisen arvopaperin arvo hetkellä k ehdosta

$$S_{N+1}(k) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_{N+1}(T)}{(1+\mathcal{I}_{k+1})\cdots(1+\mathcal{I}_T)} \mid \mathcal{F}_k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Osoita, että syntyneet markkinat ovat arbitraasivapaat.

4. Kolmen periodin markkinoilla on kolme arvopaperia. Olkoon arvopaperin n hinta hetkellä k $S_n(k)$. Oletetaan, että $S_1(k) = (1+\mathcal{I}_1)\cdots(1+\mathcal{I}_k)$ (tyhjä tulo tulkitaan ykköseksi). Arvopaperi 2 on kahden ja arvopaperi 3 kolmen vuoden nollakuponkibondi ts. $S_2(2) \equiv 1$ ja $S_3(3) \equiv 1$. Koron $\mathcal{I}_k$ mahdolliset arvot ovat $\delta_k i_k, \delta_k^2 i_k, \ldots, \delta_k^k i_k$, missä $\delta_k > 1$ ja $i_k > 0$ ovat vakioita. Lisäksi $\mathcal{I}_{k+1} = \delta_{k+1}^j i_{k+1}$ tai $\delta_{k+1}^{j+1} i_{k+1}$, jos $\mathcal{I}_k = \delta_k^j i_k$. (kyseessä on ns. Black-Derman-Toy korkomalli).

Valitaan $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$, missä tilat ω_j vastaavat lyhyiden korkojen $\mathcal{I}_2$ ja $\mathcal{I}_3$ mahdollisia arvopareja

$$\{\mathcal{I}_2 = \delta_2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3 i_3\}, \quad \{\mathcal{I}_2 = \delta_2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3^2 i_3\}, \quad \{\mathcal{I}_2 = \delta_2^2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3^2 i_3\}$$

ja $\{\mathcal{I}_2 = \delta_2^2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3^3 i_3\}$. Olkoon edelleen

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}, \quad \mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{I}(2)) \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \sigma(\mathcal{I}(2), \mathcal{I}(3)).$$

Oletetaan, että markkinoita kontrolloiva riskineutraali todennäköisyysmitta Q on symmetrinen ts. $Q(\omega_j) = 1/4, \forall j$. Määrää arvopapereiden hinnat $S_n(k), k = 0, 1, 2$, kun $n = 2, 3$.

5. (jatkoa) Olkoon korkomalli, kuten edellä. Pyritään kalibroimaan parametrit i_1, i_2 ja i_3 nojautuen markkinoilta saatavissa oleviin nollakuponkibondien todellisiin hintoihin. Olkoot nämä p_1, p_2 ja p_3, missä p_n on n vuoden nollakuponkibondin markkinahinta hetkellä nolla. Oletetaan, että $1 > p_1 > p_2 > p_3$. Osoita, että paramatrit i_1, i_2 ja i_3 voidaan määrätä siten, että tehtävän 4 malli antaa todellisia markkinoita vastaavat hinnat kyseisille bondeille.