Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 3, 19.3.2009

1. Tarkastellaan markkinoita, joilla on neljä arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla i. Hinta hetkellä nolla olkoon $1/(1+i)$ (bondin arvo hetkellä yksi on siis 1). Arvopaperi 2 on osake, jonka mahdolliset arvot hetkellä 1 ovat $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$, missä

$$0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_M.$$

Arvopaperi 3 on eurooppalainen myyntioptio, jonka omistajalla on oikeus myydä hetkellä yksi 1 osake hintaan γ ja arvopaperi 4 eurooppalainen osto-optio, jonka omistajalla on oikeus ostaa hetkellä yksi 1 osake hintaan γ. Olkoon p osakkeen, q myyntioption ja r osto-option hinta hetkellä nolla. Osoita, että arbitraasivapailla markkinoilla pätee ns. *myynti-ostopariteetti*

$$r + \frac{\gamma}{1+i} = p + q.$$

2. Tarkastellaan markkinoita, joilla on kolme arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i > 0$. Arvopaperi 2 on osake, jonka hinta hetkellä nolla on p. Arvopaperi 3 on eurooppalainen osto-optio, jonka omistajalla on oikeus ostaa hetkellä yksi 1 osake hintaan p. Option hetken nolla hinta on q. Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat.

Lisätään markkinoille arvopaperi, jonka ehdot ovat seuraavat. Hetkellä yksi arvopaperin omistajalle palautetaan siitä hetkellä nolla maksettu hinta. Jos osakkeen kurssi hetkestä nolla hetkeen yksi on noussut, omistaja saa lisäksi yhden osakkeen kurssinousua vastaava rahamäärän. Määrää arvopaperin hetken nolla arbitraasivapaat hinnat.

3. Olkoot arvopaperit 1 ja 2 kuten tehtävässä 1. Oletetaan, että toimijan on maksettava erään sopimuksen perusteella hetkellä 1 määrä X (satunnaismuuttuja). Toimija pyrkii vähentämään riskiä muodostamalla hetkellä nolla salkun $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$, joka minimoi varianssin $\mathbb{V}(X - S(1)\theta)$ kaikkien sellaisten salkkujen joukossa, joille pätee $\mathbb{E}(S(1)\theta) = \mathbb{E}(X)$. Määrää minimoiva salkku $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$

4. Tarkastellaan luentojen kohdan 5.1 mukaisia markkinoita, jotka oletetaan arbitraasivapaiksi. Olkoon Φ hinnoittelijoiden joukko. Lisätään markkinoille sopimus X, jonka hetken nolla hinta on V. Olkoon

$$\underline{V} = \inf\{\mathbb{E}(\phi X) \mid \mathbb{E}(\phi X) < \infty, \phi \in \Phi\},$$

$$\overline{V} = \sup\{\mathbb{E}(\phi X) \mid \mathbb{E}(\phi X) < \infty, \phi \in \Phi\}.$$

Oletetaan, että $\underline{V} < \overline{V}$. Osoita, että laajennetut markkinat ovat arbitraasivapaat, jos $V \in (\underline{V}, \overline{V})$.

5. (jatkoa) Olkoon lisäksi $\overline{V} < \infty$ ja $W > \overline{V}$. Osoita, että on olemassa sellainen alkuperäisten arvopapereiden muodostama salkku θ, että $S(0)\theta = W$ ja $S(1)\theta \geq X$ m.v.