

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 2, 12.3.2009

1. Tarkastellaan markkinoita, joilla on kaksi arvopaperia. Toinen on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla i ja toinen osake, jonka mahdolliset arvot hetkellä 1 ovat $\alpha_1, \dots, \alpha_M$, missä

$$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_M.$$

Olkoon p osakkeen hinta hetkellä 0.

Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Osoita, että $p \in (\frac{\alpha_1}{1+i}, \frac{\alpha_M}{1+i})$.

2. (jatkoa) Olkoot arvopaperit kuten edellisessä tehtävässä ja $p \in (\frac{\alpha_1}{1+i}, \frac{\alpha_M}{1+i})$. Osoita, että markkinat ovat arbitraasivapaat.

3. (jatkoa) Olkoot arvopaperit kuten tehtävässä 1 ja $p \in (\frac{\alpha_1}{1+i}, \frac{\alpha_M}{1+i})$. Lisätään arvopaperivalikoimaan sopimus, jonka haltija ostaa hetkellä 1 yhden osakkeen sovittuun hintaan γ (osto toteutetaan aina). Määrää arvopaperin arbitraasivapaa hinta sopimuksen tekohetkellä 0 (mikäli kysytty hinta on nolla, kutsutaan sopimusta *terminiksi*).

4. Tarkastellaan markkinoita, joilla on kolme arvopaperia. Olkoon arvopaperin n arvo hetkellä yksi $S_n(1)$, $n = 1, 2, 3$. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$. Arvopaperi 2 on osake, jonka mahdolliset arvot hetkellä 1 ovat α_1, α_2 ja α_3 , missä $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Olkoon p osakkeen hinta hetkellä nolla. Arvopaperi 3 on 'kaikki tai ei mitään' -sopimus kynnyksellä $\gamma \in (\alpha_2, \alpha_3)$. Haltija saa hetkellä yksi määrän $S_2(1)$, jos $S_2(1) \geq \gamma$ ja muuten ei mitään. Olkoon q sopimuksen hinta hetkellä nolla. Osoita, että arbitraasivapailla markkinoilla

$$\frac{\alpha_3((1+i)p - \alpha_2)}{(1+i)(\alpha_3 - \alpha_2)} < q < \frac{\alpha_3((1+i)p - \alpha_1)}{(1+i)(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

5. Olkoot arvopaperit kohdan 5.1 alun mukaiset ja $T = 1$. Oletetaan, että

$$S_N(1) = \theta_1 S_1(1) + \dots + \theta_{N-1} S_{N-1}(1)$$

eräille $\theta_1, \dots, \theta_{N-1} \in \mathbb{R}$. Osoita lauseen 5.1 avulla, että arbitraasivapailla markkinoilla

$$S_N(0) = \theta_1 S_1(0) + \dots + \theta_{N-1} S_{N-1}(0).$$