Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 3, 5.2.2009

Huom. Kurssiin liittyvä seminaari on 12.3. klo 16-18. Tarkemmat tiedot tulevat vakuutusmatematiikan seminaariohjelmaan

1. Tarkastellaan elämänvaravakuutusta, jossa vakuutetulle korvataan summa S, jos tämä on elossa hetkellä $n > 0$. Elossa oleva vakuutettu maksaa vakuutusmaksua jatkuvasti ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\bar{P}(t)$ välillä $t \in [0, n]$. Vakuutettu on x-ikäinen hetkellä nolla. Jäljellä oleva elinaika olkoon T. Olkoon korkoutuvuus δ ja x-ikäisen kuolevuus μ. Oletetaan, että $\bar{P}, \mu$ ja δ ovat ei-negatiivisia jatkuvia funktioita. Olkoon $D(t) = \int_0^t \delta(s)ds$, $t \geq 0$.

Olkoon $Z(t) = \mathbf{1}(T \leq t)$. Sopimuksen satunnaisylijäämä hetkeen $t \in [0, n]$ mennessä olkoon $\Gamma(t)$. Toisin sanoen

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{-D(s)} \bar{P}(s) \mathbf{1}(Z(s) = 0)\, ds - e^{-D(t)} V_{Z(t)}(t),$$

missä $V_j(t)$ on hetken t vastuuvelka, jos $Z(t) = j$. Osoita, että $\{\Gamma(t); t \in [0, n]\}$ on martingaali.

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\mathrm{Var}\,(\Gamma(t)) = \int_0^t e^{-2D(s)} V_0(s)^2 \mu(s)\, {}_s p_x \, ds$$

kaikilla $t \in [0, n]$.

3. Elämänvaravakuutuksen vakuutusaika on n ja korvaussumma S. Olkoot δ, D, T ja Z kuten tehtävässä 1. Elossa oleva vakuutettu maksaa vakuutusmaksua jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}(t) = 1 - t/n$ välillä $t \in [0, n]$. Esitä elämänvarakorvauksen nykyarvo muodossa

$$\int_0^n e^{-D(s)} \mathbf{1}(Z(s) = 0) dA^{(1)}(s)$$

ts. määrää funktio $A^{(1)}$. Esitä vakuutusmaksujen nykyarvo samassa muodossa ts. määrää sellainen funktio $A^{(2)}$, että kyseinen nykyarvo on

$$\int_0^n e^{-D(s)} \mathbf{1}(Z(s) = 0) dA^{(2)}(s).$$

Määrää myös sellainen funktio A, että ekvivalenssiperiaatteen mukainen korvaussumma S määräytyy ehdosta

$$\mathbb{E}\left(\int_0^n e^{-D(s)} \mathbf{1}(Z(s) = 0) dA(s) \right) = 0.$$

4. Olkoon N_k kohdan 2.4 mukainen syyhyn k kuolleiden henkilöiden lukumäärää kuvaava stokastinen prosessi, Λ_k prosessin N_k kompensaattori ja $M_k = N_k - \Lambda_k$, $k = 1, 2$. Osoita, että $[N_1, N_2] = 0$ m.v. ja että $M_1 M_2$ on martingaali.

5. (jatkoa) Osoita, että Nelson-Aalen estimattoreissa

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^t H(s) dM_1(s), \int_0^t H(s) dM_2(s) \right) = 0.$$