Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 2, 29.1.2009

Tarkastellaan kahden henkilön ryhmän elossaolotiloja. Henkilön j elinaika olkoon T_j, $j = 1, 2$. Oletetaan, että T_1 ja T_2 ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Yhteinen kuolevuus μ oletetaan jatkuvaksi. Olkoon $Z_j(t) = \mathbf{1}(T_j \leq t)$, $j = 1, 2$. Tarkastellaan paria

$$Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t))$$

Markov-prosessina. Tila-avaruus on $E = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ ja alkutila $(0,0)$. Oletetaan tunnetuksi, että Z todella on Markov-prosessi. Seuraavassa $\mathcal{F}_t$ tarkoittaa prosessin sisäistä historiaa, $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_1(s), Z_2(s) | s \leq t)$.

1. Osoita, että $\mathbb{E}(Z_1(t+\Delta) - Z_1(t)|\mathcal{F}_t) = \mu(t)\mathbf{1}(T_1 \geq t)\Delta + o(1)\Delta$, kun $\Delta \to 0+$.

2. Olkoon $\Lambda_1(t) = \int_0^t \mu(s)\mathbf{1}(T_1 \geq s)ds$. Osoita, että

$$\mathbb{E}(\Lambda_1(t+\Delta) - \Lambda_1(t)|\mathcal{F}_t) = \mu(t)\mathbf{1}(T_1 \geq t)\Delta + o(1)\Delta, \text{kun } \Delta \to 0+.$$

3. Osoita, että Λ_1 on prosessin Z_1 kompensaattori historian $\{\mathcal{F}_t\}$ suhteen.

4. Määrää prosessin $Z_1 + Z_2$ kompensaattori. Tarkasteltavat sigma-algebrat ovat kuten edellisessä tehtävässä.

5. Olkoon $Z_j = M_j + \Lambda_j, j = 1, 2$, missä siis M_j on martingaali. Määrää $\langle M_1 + M_2 \rangle$.