Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 1, 22.1.2009

1. Olkoon $X = \{X(t); t \geq 0\}$ martingaali sigma-algebraperheen $\{\mathcal{F}_t\}$ suhteen ja ξ ja η $\mathcal{F}_0$-mitallisia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $|\xi| \leq M$ ja $|\eta| \leq M$ m.v. eräälle $M \in \mathbf{R}$. Osoita, että $\{\xi X + \eta\}$ on martingaali.

2. (jatkoa) Oletetaan vahvemmin, että X on neliöintegroituva martingaali. Olkoon $\langle X \rangle$ prosessin $\{X^2\}$ kompensaattori. Osoita, että

$$\langle \xi X + \eta \rangle = \xi^2 \langle X \rangle.$$

3. Olkoot prosessit $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2, H_1$ ja H_2 kuten lemmassa 1.5. Oletetaan lisäksi, että

$$X_1(a) = X_2(a) = Y_1(a) = Y_2(a) = 0, \forall \omega,$$

ja että $0 \leq H_k(s, \omega) \leq B, \forall \omega$, $k = 1, 2$, missä $B > 0$ on vakio. Olkoon $t \in [a, b]$ ja

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

sellainen välin $[a, b]$ jako, että t on eräs jakopiste. Olkoon $u \in [t, b]$. Osoita, että voidaan määrätä sellainen integroituva jaosta riippumaton satunnaismuuttuja ξ, että

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} H_1(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} H_2(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \right) \right| \leq \xi.$$

4. (jatkoa) Olkoon

$$G(t) = \int_a^t H_1(s) dX(s) \int_a^t H_2(s) dY(s), \quad t \in [a, b].$$

Osoita, että

$$\mathbf{E}(G(u)|\mathcal{F}_t) = G(t) + \mathbf{E}\left(\int_t^u H_1(s) H_2(s) d(X(s)Y(s)) | \mathcal{F}_t \right).$$

5. (jatkoa) Olkoon

$$F(t) = \int_a^t H_1(s) H_2(s) d(\langle X, Y \rangle(s)), \quad t \in [a, b].$$

Osoita, että

$$F(t) = \int_a^t H_1(s) H_2(s) d(X(s)Y(s)) + \text{ martingaali.}$$