Riskiteorian laskuharjoitus 7, 12.11. 2009

Huom. 18.11. ei ole luentoa, 26.11. ei ole harjoituksia

1. Määrää gamma-(r, a)-jakauman kaikki konjugaattijakaumat.

2. Olkoon yhtiön kokonaisvahinkomäärällä X yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla (λ, S), missä S on eksponenttijakauman kertymäfunktio parametrilla μ, $S(z) = 1 - e^{-\mu z}$ alueessa $z > 0$. Olkoon X:n kumulantit generoiva funktio c. Osoita, että

$$c^*(v) = \mu v + \lambda - 2\sqrt{v\mu\lambda}$$

alueessa $v > 0$.

3. (jatkoa) Yhtiöllä on vuoden alussa alkupääoma U_0 ja vuotuinen vakuutusmaksu on P. Osoita, että yhtiön vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on tason ε alapuolella. Parametreilla on arvot $\lambda = 100, \mu = 1, P = 120$, $U_0 = 30$ ja $\varepsilon = 0.01$.

4. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Olkoon c_ξ muuttujan ξ kumulantit generoiva funktio. Oletetaan, että c_ξ on äärellinen eräässä origon ympäristössä. Olkoon $a > 0$ kiinteä ja $\mu_\xi = \mathbb{E}(\xi) > 0$. Oletetaan, että $c'_\xi(t) = (1 + a)\mu_\xi$ eräälle $t \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq n(1 + a)\mu_\xi\right) \leq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) e^{-nc^*_\xi((1+a)\mu_\xi)},$$

missä $o(1) \to 0$, kun $n \to \infty$.

Vihje: käytä luentojen esitystä (6.3.3.3).

5. (jatkoa) Olkoon $\mathbb{V}ar(\xi) = \sigma_\xi^2 > 0$ ja ϕ_n todennäköisyyden $\mathbb{P}\left(S_n \geq n(1 + a)\mu_\xi\right)$ normaaliapproksimaatio. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \phi_n = -\frac{a^2\mu_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}.$$

Vihje: riippumattomien normaalisti jakautuneiden satunnaismuuttujien summa on normaalisti jakautunut.