Riskiteorian laskuharjoitus 6, 5.11.2009

1. Oletetaan, että yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla (λ, Q, S). Olkoon $\lambda = 100$, $S(z) = 1 - \exp(-z)$ alueessa $z > 0$ ja $\mathbb{P}(Q = 0.9) = \mathbb{P}(Q = 1.1) = 0.5$ (vrt. edellisen kerran tehtävät 4 ja 5). Arvioi todennäköisyyttä $\mathbb{P}(X > 130)$ soveltamalla Wilson-Hilferty -approksimaatiota.

2. Oletetaan, että yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Olkoon Poisson-parametri λ ja vahinkojen suuruudet eksponenttijakautuneita parametrina μ. Yhtiöllä on vuoden alussa alkupääoma U_0 ja vuotuinen vakuutusmaksu on P. Tarkastellaan seuraavassa X:n jakaumaa NP-approksimaation tarkkuudella. Olkoon $\mu = 1, \lambda = 100$ ja $\varepsilon = 0.01$.

a) Olkoon $P = 110$. Miten suuri on alkupääoman oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

b) Olkoon $U_0 = 30$. Miten suuri on vakuutusmaksun P oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

3. Olkoon yhtiön i $(i = 1, 2)$ vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X_i yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja, vuotuinen vakuutusmaksu P_i ja alkupääoma U_i. Olkoon Poisson-parametri λ_i ja vahinkojen suuruudet gamma-(r_i, a_i)-jakautuneita. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on pienempi kuin 0.01. Totea käyttäen normaaliapproksimaatiota, että kumpikaan yhtiöistä ei täytä tätä vaatimusta, kun $P_i = 1.05\,\mathbb{E}(X_i)$, $U_1 = 100$, $U_2 = 200$, $\lambda_1 = 1000$, $\lambda_2 = 800$, $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $a_1 = 1$ ja $a_2 = 1$.

Tarkastellaan tilannetta, jossa yhtiöt fuusioidaan. Oletetaan lisäksi, että kokonaisvahinkomäärät X_1 ja X_2 ovat riippumattomia. Totea, että fuusiossa syntynyt yhtiö täyttää mainitun vaatimuksen. Sovella normaaliapproksimaatiota.

4. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo $\mathbb{E}(X)$, varianssi $\mathbb{V}ar(X)$ ja vinous γ_X ovat äärellisinä olemassa. Oletetaan, että $\gamma_X > 0$. Olkoon $x > \mathbb{E}(X) + \mathbb{V}ar(X)$ kiinteä ja P_N ja P_{NP} todennäköisyyden $\mathbb{P}(X \geq x)$ normaali- ja NP-approksimaatiot. Osoita, että $P_{NP} > P_N$.

5. Oletetaan, että kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa. Vahinkojen lukumäärän odotusarvo on $\lambda = 2$ ja struktuurimuuttujan Q jakauma $\mathbb{P}(Q = 0.9) = \mathbb{P}(Q = 1.1) = 0.5$. Tuota simuloimalla yksi havainto X:n jakaumasta allaolevien satunnaislukujen avulla, kun yksittäiset vahingot ovat eksponenttijakautuneita parametrilla $\mu = 1$.

Riippumattomia T(0,1)-jakautuneita satunnaislukuja:

0.425, 0.551, 0.388, 0.500, 0.441, 0.611, 0.490, 0.620, 0.552, 0.392, 0.701, 0.521, 0.590, 0.641