

## Riskiteorian laskuharjoitus 5, 22.10.2009

1. Osoita, että Eulerin gammafunktiolle pätee

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$$

alueessa  $r > 1$ . Todista tämän tuloksen avulla, että Polya-muuttujan  $K$  pistetodennäköisyydet  $p_k = \mathbb{P}(K = k)$  toteuttavat rekursiokaavan

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

missä  $a$  ja  $b$  ovat sopivia vakioita.

2. Olkoon  $K$  lukumäärämuuttuja ja  $p_k = \mathbb{P}(K = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Oletetaan, että

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

missä  $a > 0$  ja  $b \neq 0$ . Olkoon  $M_K$   $K$ :n momentit generoiva funktio. Osoita, että

$$M'_K(s) = ae^s M'_K(s) + ae^s M_K(s) + be^s M_K(s)$$

alueessa  $s < 0$  ja määrää  $M_K$ . (Vastaus:  $M_K(s) = \left(\frac{1-a}{1-ae^s}\right)^{(a+b)/a}$ , kun  $s < 0$ .)

3. (jatkoa) Osoita, että  $K$  on Polya-jakautunut, jos lisäksi  $a < 1$  ja  $a + b > 0$ .

4. Olkoon  $X$  yhtiön vuoden kokonaisvahinkomäärä ja  $P = 1.3\mathbb{E}(X)$  kokonaisvakuutusmaksu. Oletetaan, että  $X$  noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa siten, että vahinkojen lukumäärän odotusarvo on  $\lambda$  ja yksittäiset vahingot ovat eksponenttijakautuneita odotusarvona  $\mu$ . Olkoon  $\lambda = 100$ ,  $\mu = 1$  ja struktuurimuuttujan  $Q$  jakauma  $\mathbb{P}(Q = 0.9) = 0.5$ ,  $\mathbb{P}(Q = 1.1) = 0.5$ . Arvioi todennäköisyyttä  $\mathbb{P}(X > P)$  soveltamalla normaaliapproksimaatiota muuttujan  $X$  ehdollisiin jakaumiin ehdolla  $Q$ .

5. Suorita edellisen tehtävän arviot nojautuen NP-approksimaatioon. Arvioi myös kyseistä todennäköisyyttä soveltamalla suoraan NP-approksimaatiota muuttujan  $X$  jakaumaan.