

Riskiteorian laskuharjoitus 4, 15.10.2009

1. Oletetaan, että yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Olkoon Poisson-parametri $\lambda > 0$ ja yksittäisen vahingon suuruudella gamma- (r, α) -jakauma ($r > 0, \alpha > 0$). Määrittää kokonaisvahinkomäärän odotusarvo, varianssi ja vinous. (Vastaukset: $\lambda r/\alpha, \lambda r(r+1)/\alpha^2, (r+2)/\sqrt{\lambda r(r+1)}$.)

2. Olkoon X_i yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja parametrilla (λ_i, Q_i, S) , $i = 1, 2$. Oletetaan, että X_1 ja X_2 ovat riippumattomia. Osoita, että $X_1 + X_2$ noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa.

3. Olkoon vahingon suuruden kertymäfunktio S ja

$$\bar{S}(z) = 1 - S(z) = (\sqrt{z} + c \log z)^{-a}, \quad \forall z \geq z_0,$$

missä c, a ja z_0 ovat positiivisia vakioita. Osoita, että \bar{S} on säännöllisesti vaihteleva. Mikä on jakauman hännän vahvuutta kuvaava lemmän 5.1 potenssi β_S .

4. Olkoon X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja ja edustakoon Z yksittäisen vahingon suuruutta. Oletetaan, että Z on rajoitettu siten, että

$$\mathbb{P}(Z \in [0, M]) = 1,$$

missä $M > 0$ on vakio. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(X)$ ja $\sigma^2 = \text{Var}(X)$. Mitataan muuttujan X vaarallisuutta suhteellisella hajonnalla $s = \sigma/\mu$. Osoita, että

$$(*) \quad s \leq \sqrt{M/\mu}.$$

5. (jatkoa) Olkoon $m \in (0, M]$ kiinteä. Konstruoi sellainen välille $[0, M]$ keskittyvä yksittäisen vahingon suuruusjakauma, että (*) toteutuu yhtälönä ja $\mathbb{E}(Z) = m$.