Riskiteorian laskuharjoitus 2, 1.10.2009

1. Olkoon $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ laskuriprosessi, jonka lisäykset ovat riippumattomia. Merkitään $p_0(t) = \mathbb{P}(K(t) = 0)$, $t \geq 0$. Olkoon $t_0 > 0$ kiinteä.

a) Osoita, että $\lim_{t \to t_0+} p_0(t) = p_0(t_0)$.

b) Olkoon $p_0(t_0-) > p_0(t_0)$, missä $p_0(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} p_0(t)$. Osoita, että

$$\lim_{t \to t_0-} \mathbb{P}(K(t_0) - K(t) \geq 1) = 1 - \frac{p_0(t_0)}{p_0(t_0-)}.$$

2. Olkoon $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ Poisson-prosessi intensiteettifunktiolla Λ ja $s > u > 0$ kiinteitä. Osoita, että

$$\mathbb{E}\{K(s) \mid K(u)\} = K(u) + \Lambda(s) - \Lambda(u).$$

3. Olkoon $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ ja $T_1, T_2, \ldots$ kuten lauseessa 3.1.3.1. Olkoon $0 \leq t_1 < u_1 \leq t_2 < u_2$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T_1 \in (t_1, u_1], T_2 \in (t_2, u_2]) = \lambda(u_1 - t_1)e^{-\lambda t_2}(1 - e^{-\lambda(u_2 - t_2)}).$$

4. (jatkoa) Olkoon $\xi_1 = T_1$ ja $\xi_2 = T_2 - T_1$ sekä $t, u > 0$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(\xi_1 \leq t, \xi_2 \leq u) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda u}).$$

Vihje: tarkastele esityksiä

$$\mathbb{P}(\xi_1 \leq t, \xi_2 \leq u) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\xi_1 \in \left(\frac{(i-1)t}{n}, \frac{it}{n}\right], \xi_2 \leq u\right)$$

rajalla, kun $n \to \infty$.

5. Todista lause 3.2.1 momentit generoivan funktion avulla.