7. Syntymä- ja kuolemaprosessi

Tarkastelemme nyt SK-ketjun jatkuva-aikaista vastinetta.

7.1. **Oletus.** Annettu parametrit $\lambda_0, \lambda_1, \dots \geq 0$, joita nimitetään *syntymäintensiteeteiksi*.

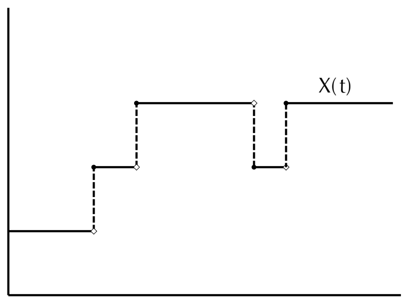
7.2. **Oletus.** Annettu parametrit $\mu_1, \mu_2, \dots \geq 0$, joita nimitetään *kuolemaintensiteeteiksi*.

7.3. **Oletus.** Ehdollisille todennäköisyyksille on arviot

$$\mathbf{P}\,(\,X(t+h) = i+1 \,|\, X(t) = i\,) \approx \lambda_i h$$

ja

$$\mathbf{P}\,(\,X(t+h) = i-1 \,|\, X(t) = i\,) \approx \mu_i h$$



Kuva 8. SK-prosessin kuvaaja

Oletuksista seuraa, että

$$\mathbf{P}\,(\,X(t+h) = i \pm 1 \,|\, X(t) = i\,) \approx (\mu_i + \lambda_i)h$$

Voimme tulkita todennäköisyydet kuten puhelinkeskusesimerkissä eksponenttijakauman avulla seuraavasti: Olkoon

$$T \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda_i\,) \quad \text{ja} \quad U \sim \mathrm{Exp}\,(\,\mu_i\,)$$

riippumattomia. Satunnaismuuttujat T ja U kuvaavat seuraavan syntymän ja kuoleman väliaikaa. Jos $T < U$, niin tapahtuu syntymä (eli siirrymme tilasta i tilaan $i+1$) ja jos $T > U$, niin kuolema tapahtuu. Tilassa i viipymisaika on $\min(T, U) \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda_i + \mu_i\,)$.

7.4. **Esimerkki** (Jatkoa Esimerkkiin 6.5)**.** Oletetaan, että puhelut saapuvat puhelinkeskukseen eksponenttijakautunein väliajoin, joten puheluiden saapumisaikaa kuvaa Poissonin prosessi parametrilla λ. Puhelujen kestoajat ovat myös eksponenttijakautuneita parametrilla μ. Kun merkitsemme

$$X(t) = \text{"varattujen lankojen lukumäärä"}$$

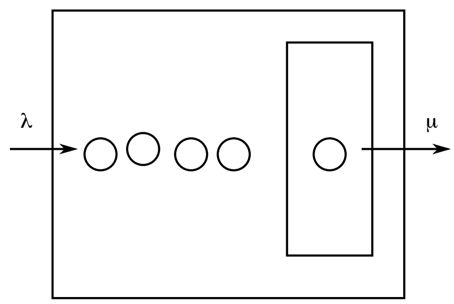
niin kyseessä on SK-prosessi. Tässä $\lambda_i = \lambda$, sillä riippumatta siitä kuinka monta lankaa oli jo käytössä uusia puheluita saapuu. Kuolemaintensiteetti $\mu_i = i\mu$, sillä tämä kuvasi todennäköisyyttä lyhyellä aikavälillä sille, että jokin käynnissäolevista i:stä puhelustä loppuu.

7.5. **Esimerkki** (Jonomalli kun vain yksi palvelupiste)**.** Oletetaan, että saapumisprosessi on Poissonin prosessi parametrilla λ. Oletetaan, että palveluajat ovat eksponenttijakautuneita $\mathrm{Exp}(\mu)$ ja riippumattomia. Oletetaan, että palvelupisteitä on vain yksi (eli jonoja on tasan yksi). Jos merkitsemme

$$X(t) = \text{"systeemissä olevian asiakkaiden lukumäärä hetkellä } t\text{"}$$

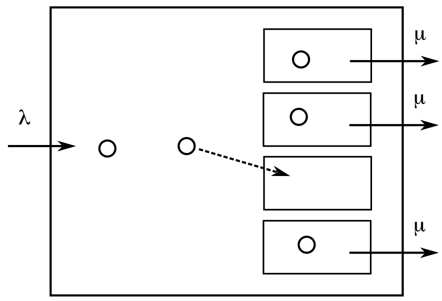
niin tämä on myös SK-prosessi, jonka intensiteetit ovat

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda. & \text{kun } i \geq 0 \\ \mu_i = \mu. & \text{kun } i \geq 1 \\ \mu_0 = 0 \end{cases}$$



Kuva 9. Yhden palvelupisteen jonomallin kaaviokuva

7.6. **Esimerkki** (Jonomalli, missä useampia palvelupisteitä)**.** Oletetaan, että saapumisprosessi on Poissonin prosessi parametrilla λ. Oletetaan, että palveluajat ovat eksponenttijakautuneita $\mathrm{Exp}(\mu)$ ja riippumattomia. Tarkastelemme harjoituksissa (Harjoitus 6) tilanteita, missä palvelupisteitä on d kappaletta tai jopa loputtomasti. Jälkimmäinen tilanne (äärettömän monta palvelupaikkaa) voi mallintaa esimerkiksi tapahtumaa, missä seuraamme henkilöiden saapumista tietylle alueelle, missä ei ole portteja, joiden kautta on poistuttava. Tällöin ”jonomalli” seuraa vain henkilöiden lukumäärää alueella.



Kuva 10. Neljän palvelupisteen jonomallin kaaviokuva

7.1. **DY SK-prosessin jakaumalle.** Kuten Poissonin prosessin tilanteessa, voimme johtaa differentiaaliyhtälön SK-prosessin jakaumalle. Olkoon $p_i := \mathbf{P}\,(\,X(0) = i\,)$ prosessin alkujakauma ja $p_i(t) := \mathbf{P}\,(\,X(t) = i\,)$ prosessin jakauma hetkellä t. Nyt

$$\begin{aligned} p_i(t) = \mathbf{P}\,(\,X(t) = i\,) \approx \mathbf{P}\,&(\,X(t-h) = i-1, X(t) = i\,) \\ + \mathbf{P}\,&(\,X(t-h) = i+1, X(t) = i\,) \\ + \mathbf{P}\,&(\,X(t-h) = i, X(t) = i\,)\,, \end{aligned}$$

joten voimme ehdollistaa hetkellä $t-h$ ja saamme

$$\begin{aligned} p_i(t) &\approx \mathbf{P}\,(\,X(t-h) = i-1\,)\,\mathbf{P}\,(\,X(t) = i \,|\, X(t-h) = i-1\,) \\ &+ \mathbf{P}\,(\,X(t-h) = i+1\,)\,\mathbf{P}\,(\,X(t) = i \,|\, X(t-h) = i+1\,) \\ &+ \mathbf{P}\,(\,X(t-h) = i\,)\,\mathbf{P}\,(\,X(t) = i \,|\, X(t-h) = i\,)\,. \end{aligned}$$

Nyt oikealla puolella on prossessin jakauma hetkellä $t-h$ sekä siirtymätodennäköisyyksiä, joita voimme arvioida intensiteettien avulla. Saamme siis

$$\begin{aligned} p_i(t) \approx\; & p_{i-1}(t-h)\lambda_{i-1}h \\ &+ p_{i+1}(t-h)\mu_{i+1}h \\ &+ p_i(t-h)\big(1-(\lambda_i+\mu_i)h\big) \end{aligned}$$

Järjestelemme nyt termit jotka eivät ole samaa suuruusluokkaa kuin h vasemmalle puolelle, joten

$$p_i(t) - p_i(t-h) \approx h\big(p_{i-1}(t-h)\lambda_{i-1} + p_{i+1}(t-h)\mu_{i+1} - p_i(t-h)(\lambda_i+\mu_i)\big)$$

Kun nyt $h \to 0^+$, niin voimme päätellä, että $p(t)$ on *jatkuva* funktio. Jakamalla edellinen arvio muuttujalla h ja antamalla $h \to 0^+$ saamme, että

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{p_i(t) - p_i(t-h)}{h} \\ &= p_{i-1}(t)\lambda_{i-1} + p_{i+1}(t)\mu_{i+1} - p_i(t)(\lambda_i + \mu_i) \end{aligned} \tag{7.7}$$

7.2. **SK-prosessin TP-jakauma.** Markovin ketjujen yhteydessä määrittelimme tasapainojakauman π todennäköisyysjakaumana, jolle $\pi P = \pi = \pi P^n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Tämä johti tulkintaan: jos ketjun alkujakauma on tasapainojakauma π, niin ketjun jakauma mielivaltaisella hetkellä on myöskin π.

Tämän ominaisuuden voimme ottaa määritelmäksi myös SK-prosessin tapauksessa.

7.8. **Määritelmä.** Todennäköisyysjakauma π on SK-prosessin *tasapainojakauma*, jos $p_i(t) = \pi_i$ jokaisella $i \in S$ ja jokaisella t.

Havaitsemme derivoimalla, että jos π on tasapainojakauma, niin

$$p_i'(t) = D\pi_i = 0$$

Nyt differentiaaliyhtälöstä (7.7) SK-ketjulle voimme päätellä, että

$$0 = p_i'(t) = \lambda_{i-1}\pi_{i-1} + \mu_{i+1}\pi_{i+1} - (\lambda_i + \mu_i)\pi_i \tag{7.9}$$

jokaisella $i \in S$, joten tasapainojakauma toteuttaakin *differenssiyhtälön*, mikä on luonnollisesti helpompi ratkaista kuin differentiaaliyhtälö.

Voimme ratkaista tämän toisen kertaluvun differenssiyhtälön, kun $S = \mathbb{N}$. Tällöin $\mu_0 = 0$ ja voimme ajatella myös, että $\lambda_{-1} = 0$. Tällöin yhtälö (7.9), kun $i = 0$ on

$$\mu_1\pi_1 - \lambda_0\pi_0 = 0 \Longrightarrow \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0.$$

Kun $i = 1$, niin ryhmittelemällä termit sopivasti havaitsemme, että

$$\big(\lambda_0\pi_0 - \mu_1\pi_1\big) + \big(\mu_2\pi_2 - \lambda_1\pi_1\big) = \mu_2\pi_2 - \lambda_1\pi_1 = 0 \Longrightarrow \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\pi_0.$$

Yleisesti voimme samaan tapaan osoittaa induktiolla, että

$$\pi_i = \frac{\lambda_{i-1}\lambda_{i-2}\ldots\lambda_1\lambda_0}{\mu_i\mu_{i-1}\ldots\mu_1}\pi_0 =: \rho_i\pi_0$$

Valitsemalla $\rho_0 = 1$ voimme esittää myös π_0:n tällä tavalla. Jos π on tasapainojakauma, niin se on todennäköisyyjakauma, joten

$$1 = \sum_{i\in S}\pi_i = \pi_0\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i =: \pi_i C$$

Olemme siis osoittaneet seuraavan tuloksen.

7.10. **Lause.** *Tasapainojakauma* π *on olemassa, jos* $C = \sum \rho_i < \infty$. *Tällöin*

$$\pi_i = \frac{\rho_i}{C}.$$

Tämän tuloksen avulla voimme laskea SK-prosessin tilassa i viettämän ajan keskimäärin, sillä

7.11. **Lause** (Ergodilause SK-prosessille)**.** *Pitkällä aikavälillä* π_i *on likimain SK-prosessin tilassa i viettämä suhteellinen aika.*

Todistus. Tämänkin lauseen todistus sivuutetaan. □