6. Poissonin prosessi

Siirrymme nyt tarkastelemaan hieman *jatkuva-aikaisia* stokastisia prosesseja, joiden tilajoukkokin voi olla ylinumeroituva joukko. Aloitamme palauttamalla mieleen *eksponenttijakautuneet satunnaismuuttujat.*

6.1. **Oletus.** Luku $\lambda > 0$ on reaalinen.

6.2. **Määritelmä.** Satunnaismuuttuja $T \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda\,)$, jos

$$F(t) := \mathbf{P}\,(\,T \le t\,) = 1 - e^{-\lambda t}$$

kullakin $t \in \mathbb{R}_+$.

Eksponenttijakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio on

$$f(t) := F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Palautamme mieleen, että eksponenttijakautuneilla satunnaismuuttujilla on myös ”unohtavaisuusominaisuus”.

6.3. **Lemma.** *Jokaisella* $t, s \ge 0$ *on voimassa*

$$\mathbf{P}\,(\,T \le t+s \,|\, T > s\,) = \mathbf{P}\,(\,T \le t\,) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Todistus. Suoraan ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\,T \le t+s \,|\, T > s\,) &= \frac{\mathbf{P}\,(\,s < T \le t+s\,)}{\mathbf{P}\,(\,T > s\,)}\\ &= \frac{\left(1 - e^{-\lambda(t+s)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda s}\right)}{e^{-\lambda s}} = 1 - e^{-\lambda t} = F(t)\end{aligned}$$

□

Määritellään nyt jatkuva-aikainen stokastinen prosessi $X(t)$, jonka tila-joukkona on $\{0, 1\}$, asettamalla

$$X(t) := [\,t < T\,] = \begin{cases} 1, & t < T \\ 0, & t \ge T. \end{cases}$$

Tämä satunnaismuuttuja voisi vaikka kuvata tapahtumaa ”lamppu palaa ajanhetkellä t” ja eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja T voisi kuvata tapahtumaa ”lampun hajoamisajankohta”. Laskemme nyt, millä todennäköisyydellä lamppu hajoaa välillä $[t, t+h]$, kun se vielä paloi hetkellä t. Suoraan määritelmän ja Lemman 6.3 nojalla

$$\mathbf{P}\,(\,X(t+h) = 0 \,|\, X(t) = 1\,) = \mathbf{P}\,(\,T \le t+h \,|\, T > t\,) = 1 - e^{-\lambda h}.$$

Koska aika on nyt jatkuva, ei *seuraavaa ajanhetkeä* ole olemassa. Voimme kuitenkin ajatella seuraavaa ajanhetkeä raja-arvona, kun $h \to 0$. Saamme siten

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{P}\,(\,X(t+h)=0\,|\,X(t)=1\,)}{h} = \lambda.$$

Pienillä $h > 0$ on siten approksimatiivisesti voimassa

$$\mathbf{P}\,(\,X(t+h)=0\,|\,X(t)=1\,) \approx h\lambda.$$

Lukua λ voimme tässä nimittää *sammumisintensiteetiksi.*

6.4. **Lemma.** *Oletetaan, että* $T_1 \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda_1\,)$ *ja* $T_2 \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda_2\,)$ *ovat riippumattomia. Tällöin* $T := \min\{T_1, T_2\} \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda_1+\lambda_2\,)$.

Todistus. Suoraan laskemalla ja soveltamalla riippumattomuutta saamme

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\,T>t\,) &= \mathbf{P}\,(\,\min\{T_1,T_2\}>t\,) = \mathbf{P}\,(\,T_1>t, T_2>t\,)\\ &= \mathbf{P}\,(\,T_1>t\,)\,\mathbf{P}\,(\,T_2>t\,) = e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.\end{aligned}$$

Tästä väite seuraakin. □

6.5. **Esimerkki** (Puhelinkeskus, Erlang 1907)**.** Voimme mallintaa puhelinkeskuksen toimintaa käyttämällä eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että puhelut yhdistetään keskuksen välityksellä liittämällä ne "puhelinlangoilla". Oletamme, että keskuksessa on d kappaletta puhelinlankoja. Oletamme lisäksi, että puheluita saapuu (toisistaan luonnollisesti riippumatta) keskukseen satunnaisesti ajanhetkillä t_0, t_1, t_2, jne. Oletamme, että kahden peräkkäisen ajanhetken t_{i+1} ja t_i väli on eksponenttijakautunut intensiteetillä λ. Siis

$$t_1 - t_0 \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda\,), \quad t_2 - t_1 \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda\,), \quad \text{jne.}$$

ja nämä satunnaismuuttujat ovat keskenään riippumattomia. Oletetaan lisäksi, että puhelun, joka saapui hetkellä t_i kesto on $s_i \sim \mathrm{Exp}\,(\,\mu\,)$. Oletamme myös, että puhelujen kestot ovat toisistaan riippumattomia sekä riippumattomia saapumisajoistakin.

Haluamme selvittää, kuinka monta puhelinlankaa on varattuna hetkellä t, sillä tämä tieto on välttämätön keskusta suunniteltaessa, jotta jonotusajat (eli hetket jolloin kaikki puhelinlangat ovat käytössä) voitaisiin minimoida. Asetamme

$$X(t) := \text{"varattujen puhelinlankojen lukumäärä hetkellä } t\text{"}.$$

Nyt $X(t) \in \{0, 1, \ldots, d\}$ eli tilajoukko on $\{0, 1, 2, \ldots, d\}$. Jos oletamme, että $X(t) = i$, niin voimme määrätä todennäköisyyden, että lyhyen ajan $h > 0$ kuluessa $X(t+h) = i+1$. Jos h on hyvin pieni, niin on varmasti epätodennäköistä, että kovin monta uutta puhelua saapuu tällä välillä ja kovin monta käynnissä olevaa puhelua loppuu. Luultavasti todennäköisintä on se, että kaikki samalla hetkellä varattuna olevat langat pysyvät varattuina, joten siirtymätodennäköisyys on

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\,(\,X(t+h)=i+1\,|\,X(t)=i\,)\\&\approx\mathbf{P}\,(\,\text{saapuu yksi uusi puhelu välillä }(t,t+h)\,|\,X(t)=i\,)\,.\end{aligned}$$

Nyt tämä voidaan tulkita seuraavan puhelun saapumisväliä kuvaavan satunnaismuuttujan T avulla, joten

$$\mathbf{P}\,(\,X(t+h)=i+1\,|\,X(t)=i\,)\approx\mathbf{P}\,(\,T\leq t+h\,|\,T>t\,)\approx\lambda h$$

Jos taas tarkastelemme tapahtumaa, että aikavälillä $(t, t+h]$ varattujen lankojen määrä tippuu yhdellä, niin luultavasti tämä todennäköisyys on likimain sama kuin tapahtuman "uusia puheluita ei tule ja jokin käynnissä olevista i:stä puhelusta loppuu välillä $(t, t+h]$" todennäköisyys. Päättelemme siis, että

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\,(\,X(t+h)=i-1\,|\,X(t)=i\,)\\&\approx\mathbf{P}\,(\,\text{jokin }i\text{:stä puheluista loppui välillä }(t,t+h)\,|\,X(t)=i\,)\end{aligned}$$

Tämän voimme kuvailla puheluiden kestojen minimin avulla. Jos $s_1, \dots, s_i$ ovat käynnissä olevien puheluiden kestot ja puhelut ovat saapuneet keskukseen aikoina $t_1, \dots, t_i$, niin tiedämme hetkellä t niiden olevan käynnissä. Siispä $\min\{s_1 + t_1, \dots, s_i + t_i\} > t$. Toisaalta yksi puheluista loppuu välillä $(t, t+h)$, joten $\min\{s_1 + t_1, \dots, s_i + t_i\} \leq t + h$. Ei vaadi suurta luottamusta (ja on myös helppo osoittaa), että riippumattomuuden nojalla voimme "unohtaa", että saapumisajat ovat satunnaisia ja voimme ajatella, että tarkastelemmekin pelkästään satunnaismuuttujaa $S := \min\{s_1, \dots, s_i\}$. Lemman 6.4 mukaan riippumattomien eksponenttijakautuneiden satunnaismuuttujien minimi on myös eksponenttijakautunut, kunhan intensiteetit μ lasketaan yhteen. Koska $s_1, \dots$ ja s_i ovat samoin jakautuneita, niin yhteenlaskettu intensiteetti on $\mu + \cdots + \mu = i\mu$. Saamme siis

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\,(\,X(t+h)=i-1\,|\,X(t)=i\,)\\&\approx\mathbf{P}\,(\,S\leq t+h\,|\,S>t\,)\approx i\mu h\end{aligned}$$

Huijasimme edellä hieman tai oikeastaan aika paljon. Käytimme termiä "luultavasti", kun yritimme muotoilla siirtymisen tilasta i tilaan $i+1$ sekä $i-1$ käyttämällä vain yhtä tulevaa tai yhtä päättyvää puhelua. Onhan mahdollista, että $X(t+h) = i+1$ jos välillä $(t, t+h)$ päättyy yksi puhelu ja saapuu kaksi puhelua. Edelleen sama vaikutus olisi kahden puhelun päättymisellä ja kolmen saapumisella jne. Nämä kaikki on poissulkevia tapahtumia, joten kokonaistodennäköisyys (eli oikea todennäköisyys) saataisiin siten laskemalla kaikki nämä mahdollisuudet yhteen. Käytimme kummassakin siirtymässä äärettömästä summasta vain ensimmäisen summattavan termin. Eihän tämä voi olla oikein, vai voiko?

Kyllä voi, sillä termin ”luultavasti” käytimme myös termiä ”likimain”. Onkin helppo osoittaa, että koko summa on likimain yhtäsuuri kuin sen ensimmäinen termi (eli koko loppusumma onkin mitättömän pieni verrattuna yhteen ainoaan termiin). Tarkemmin voimme ymmärtää käyttämämme epämääräisen merkinnän $\approx$ seuraavasti[7]:

$$a(h) \approx b(h) \quad \text{jos } a(h) - b(h) \text{ on ”pieni” verrattuna}$$
$$\text{sekä termiin } a \text{ että termiin } b$$

Tämän voi perustella seuraavasti. Jos välillä $(t, t+h)$ saapuu kaksi puhelua ja yksi loppuu, niin ehdolla, että $X(t) = i$ tämän tapahtuman todennäköisyys on korkeintaan

$$\mathbf{P}\,(\,T_1, T_2, S \leq t+h \,|\, S, T_1, T_2 > t\,)$$

Riippumattomuuden ja Lemman 6.4 nojalla voimme päätellä kuten Lemmassa 6.3, että tämä todennäköisyys on

$$\big(\mathbf{P}\,(\,T \leq t+h \,|\, T > t\,)\big)^2 \mathbf{P}\,(\,S \leq t+h \,|\, S > t\,) \approx \lambda^2 h^2 i\mu h = i\mu\lambda^2 h^3$$

Vastaavasti seuraavan tapahtuman (kolme puhelua saapuu ja kaksi loppuu) todennäköisyys ehdolla $X(t) = i$ on korkeintaan likimain $i^2\mu^2\lambda^3h^5$. Induktiolla voimme päätellä, että tapahtuman $n+1$ puhelua saapuu ja n loppuu välillä $(t, t+h)$, kun $X(t) = h$ on $i^n\mu^n\lambda^{n+1}h^{2n+1}$. Siispä näiden tapahtumien yhdisteen todennäköisyys on korkeintaan

$$\begin{aligned} &i\mu\lambda^2h^3 + i^2\mu^2\lambda^3h^5 + \cdots + i^n\mu^n\lambda^{n+1}h^{2n+1} + \dots \\ &= i\mu h^3\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} i^k\mu^k\lambda^k h^{2k} = i\mu\lambda^2h^3 \frac{1}{1 - i\mu\lambda h^2} \leq Ch^3, \end{aligned}$$

kunhan $i\mu\lambda h^2 < 1$ eli h on riittävän pieni. Koko ääretön sarja on siis mitättömän pieni verrattuna ensimmäisen tapahtuman todennäköisyyteen, joka on likimain λh.

[7] merkintä on edelleenkin hyvin epämääräinen, tarkkuutta varten voisimme käyttää *Landaun notaatiota* $a_h = b_h + o(c_h)$, missä c_h kertoisi nollaanmenonopeuden

Täysin vastaavasti voimme osoittaa siirtymän tilasta i tilaan $i-1$ likimääräisen oikeellisuuden.[8] Samoin voimme helposti osoittaa, että

$$\mathbf{P}\left(X(t+h) = i+2 \,|\, X(t) = i \right) \approx \lambda^2 h^2$$

ja yleisesti

$$\mathbf{P}\left(X(t+h) = i+k \,|\, X(t) = i \right) \approx \lambda^k h^k.$$

Myös

$$\mathbf{P}\left(X(t+h) = i-k \,|\, X(t) = i \right) \approx i^k \mu^k h^k.$$

Voimme siten laskea, että

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{P}\left(X(t+h) = j \,|\, X(t) = i \right)}{h} =: q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{kun } j = i+1, \text{ ja } i < d, \\ i\mu, & \text{kun } j = i-1, \\ 0, & \text{muutoin, kunhan } j \neq i. \end{cases}$$

Havaitsimme siis, että *siirtymäintensiteetit* q_{ij} poikkeavat nollasta vain, kun $j = i-1$ tai $j = i+1$. Tila d on keskuksen kannalta ikävä tila ”kaikki puhelinlangat on varattu”, jolloin tulevat puhelut joudutaan laittamaan jonoon. Jätimme myös tapahtuman siirtymäintensiteetin q_{ii} määräämättä. Tämä seuraa siitä, että hyvin lyhyellä aikavälillä

$$\mathbf{P}\left(X(t+h) = i \,|\, X(t) = i \right) \approx 1 - i\mu h - \lambda h$$

joten siirtymäintensiteetistä q_{ii} tulisi ääretön. Tässä mielessä käsite siirtymä onkin nyt ymmärrettävä todellakin siirtymisenä ja samassa tilassa säilymistä ei tule yrittääkään kuvata siirtymäintensiteetin avulla.

Huomaamme lisäksi tästä, että intensiteetti ei siis ole mikään todennäköisyys vaan ainoastaan mallin tulkintaa sekä ajattelua helpottava käsite, joka muistuttaa läheisesti Markovin ketjun siirtymätodennäköisyyttä.

Esimerkin puhelinkeskuksen tilajoukko oli $\{0, 1, \ldots, d\}$ ja tilasiirtymien väliajat olivat eksponenttijakautuneita. Lisäksi huomasimme, että $X(t)$ periaatteessa pysyi paikallaan tai siirtyi yhdellä ylös tai yhdellä alas.

Olemme jo hyvin lähellä Poissonin prosessia, joka on vielä yksinkertaisempi prosessi kuin $X(t)$, sillä nyt joko pysymme samassa tilassa tai siirrymme yhdellä ylöspäin. Palautamme ensin mieleen Poisson-jakautuneen satunnaismuuttujan.

[8] Miettimällä vielä hieman tarkemmin huomaamme, että huijasimme vielä tässäkin, sillä päättelimme oikeastaan yhden puheluista loppumisen sijasta todennäköisyyden vähintään yhden loppumiselle ja tätä todennäköisyyttä käytimme myös, kun määräsimme, että arvio $\mathbf{P}\left(X(t+h) = i+1 \,|\, X(t) = i \right) \approx \lambda h$ pitää paikkaansa. Tarvitsimme todennäköisyyttä yhden puhelun loppumiselle vain arviodessamme ”häntätermiä” ja korvasimme todennäköisyyden isommalla luvulla, joten arviomme on siltikin ”oikein”

6.6. **Määritelmä.** Olkoon $\lambda > 0$. Satunnaismuuttuja $N \in \mathbb{N}$ on Poisson-jakautunut, $N \sim \text{Poisson}\,(\,\lambda\,)$, jos

$$\mathbf{P}\,(\,N = n\,) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

kun $n \in \mathbb{N}$.

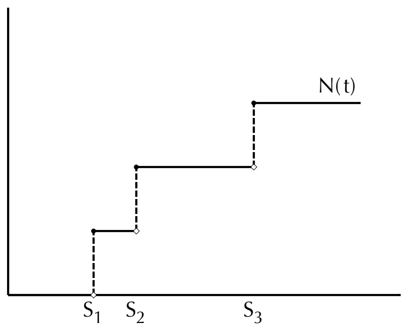
6.7. **Oletus.** Satunnaismuuttujat T_i ovat riippumattomia $i = 1, 2, \ldots$ ja $T_i \sim \text{Exp}\,(\,\lambda\,)$.

6.8. **Oletus.** Satunnaismuuttuja $S_i := T_1 + \cdots + T_i$ on i:nnen *insidenssin* hetki

6.9. **Oletus.** Satunnaismuuttuja $N(t) \in \mathbb{N}$ on

$$N(t) := \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq t < S_1 \\ 1, & \text{kun } S_1 \leq t < S_2 \\ 2, & \text{kun } S_2 \leq t < S_3 \\ & \vdots \\ i, & \text{kun } S_i \leq t < S_{i+1} \\ & \vdots \end{cases}$$

6.10. **Määritelmä.** Stokastinen prosessi $(N(t)\,;\, t \geq 0)$ on *Poissonin prosessi*, jonka parametri on λ.



KUVA 7. Poissonin prosessin kuvaaja

Prosessin nimi on seurausta seuraavasta ominaisuudesta. Merkitsemme satunnaismuuttujan $N(t)$ jakaumaa $p_k(t) := \mathbf{P}\,(\,N(t) = k\,)$, kun $k \in \mathbb{N}$ ja $t \geq 0$. Osoitautuu, että $N(t)$ on Poisson-jakautunut kullakin $t > 0$.

6.11. **Lause.** *Satunnaismuuttuja* $N(t) \sim \text{Poisson}\,(\,\lambda t\,)$ *jokaisella* $t \geq 0$ *eli*

$$p_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Todistus. Tiedämme jo, että

$$\mathbf{P}\,(\,N(t+h)=k+1\,|\,N(t)=k\,)\approx\lambda h,$$

sillä tämä on tarkalleen sama kysymys kuin lamppuesimerkissä. Nyt

$$\begin{aligned}p_k(t)=\mathbf{P}\,(\,N(t)=k\,)\approx\mathbf{P}\,(\,N(t-h)=k-1,N(t)=k\,)\\+\,\mathbf{P}\,(\,N(t-h)=k,N(t)=k\,)\,.\end{aligned}$$

Tämä seuraa samanlaisella tarkastelulla kuin puhelinkeskusesimerkissä, sillä todennäköisyys, että $N(t-h)<k-1$ on häviävän pieni[9] verrattuna tapahtumaan $N(t-h)=k-1$. Voimme nyt ehdollistaa ja laskea oikean puolen termit likimäärin. Ensimmäinen termi on

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\,N(t-h)=k-1,N(t)=k\,)&=\mathbf{P}\,(\,N(t-h)=k-1\,)\times\\&\quad\times\mathbf{P}\,(\,N(t)=k\,|\,N(t-h)=k-1\,)\\&\approx p_{k-1}(t-h)\lambda h\end{aligned}$$

Vastaavasti toinen termi on

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\,N(t-h)=k,N(t)=k\,)&=\mathbf{P}\,(\,N(t-h)=k\,)\times\\&\quad\times\mathbf{P}\,(\,N(t)=k\,|\,N(t-h)=k\,)\\&\approx p_k(t-h)(1-\lambda h).\end{aligned}$$

Olemme siis päätelleet, että

$$p_k(t)\approx p_{k-1}(t-h)\lambda h+p_k(t-h)(1-\lambda h), \tag{6.12}$$

joten antamalla $h\to 0^+$ havaitsemme, että $p_k(t)$ on jatkuva pisteessä h. Jakamalla kaava (6.12) puolittain muuttujalla h ja sen jälkeen antamalla $h\to 0^+$ havaitsemme, että

$$\begin{aligned}p_k'(t)&=\lim_{h\to 0^+}\frac{p_k(t)-p_k(t-h)}{h}=\lambda\lim_{h\to 0^+}\big(p_{k-1}(t-h)-p_k(t-h)\big)\\&=\lambda\big(p_{k-1}(t)-p_k(t)\big)\end{aligned} \tag{6.13}$$

Tämä on differenssi-differentiaaliyhtälö jakaumafunktiolle p_k, mutta onneksi yhtälö on varsin helppo ratkaista. Jos $k=0$, niin voimme ajatella että $p_{-1}(t)=0$, jolloin yhtälö on myös voimassa. Ratkaisemme yhtälön generoivan funktion avulla. Merkitsemmekin siksi

$$f_s(t):=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t)s^k,\quad 0\le s\le 1.$$

[9] tarkkuutta haluaville mainitsen, että tämän todistuksen ajan relaation $a_h\approx b_h$ voi ymmärtää tarkoittavan $a_h=b_h+o(h)$. Likimäärää kuvaava merkki on vain mukava lyhenne tälle

Nyt käyttämällä yhtälöä (6.13) saamme,

$$\begin{aligned} f_s'(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k'(t)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\big(p_{k-1}(t) - p_k(t)\big)s^k \\ &= \lambda \sum_{k=-1}^{\infty} p_k(t)s^{k+1} - \lambda f_s(t) = s\lambda f_s(t) - \lambda f_s(t) \\ &= \lambda(s-1)f_s(t) =: af_s(t). \end{aligned}$$

Funktio f_s toteuttaa siis helpoimman 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön ja on siten ratkaistavissa suoraan:

$$f_s(t) = Ce^{at} = Ce^{\lambda(s-1)t}.$$

Koska $p_k(0) = [\, k = 0 \,]$, sillä $N(0) = 0$ varmasti, niin

$$f_s(0) = C = \sum_{k=0}^{\infty} [\, k = 0 \,] s^k = 1 \quad \Longrightarrow \quad f_s(t) = e^{\lambda(s-1)t}$$

Koska eksponenttifunktion sarjaesitys on

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)s^k = e^{-\lambda t}e^{\lambda s} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{k!},$$

niin vertaamalla kertoimia olemme osoittaneet, että

$$p_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^k}{k!},$$

mikä olikin väite. □

Poissonin prosessilla on seuraavanlainen Markov-ominaisuus.

6.14. **Lause.** *Kun $N(t)$ on Poissonin prosessi, niin*

$$\mathbf{P}\,(\, N(s+t) - N(s) = i \,|\, N(s) = k \,) = \mathbf{P}\,(\, N(t) = i \,) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Todistus. Tämä on enemmänkin todistuksen luonnos kuin tarkka todistus. Väite seuraa siitä, että väliajat T_i ovat eksponenttijakautuneita ja myös odotusaika seuraavaan insidenssiin on eksponenttijakautunut ehdolla. Jos siirrämme kelloa siten, että aika alkaakin hetkellä s, niin prosessi $\widetilde{N}(t) := N(s+t) - N(s)$ on Poissonin prosessi riippumatta siitä, mikä arvo prosessilla on hetkellä s. Tämä seuraa eksponenttijakautuneiden satunnaismuuttujien unohtavaisuusominaisuudesta (eli Lemmasta 6.3).

Hieman tarkemmin tapahtuma

$$\{N(s+t) - N(s) = i, N(s) = k\} = \{S_k \le s < S_{k+1} \le S_{k+i} \le s + t < S_{k+i+1}\}$$

Odotusaika seuraavaan hetkeen on satunnaismuuttuja $T := S_{k+1} - S_k$. Vähentämällä edellinen insidenssi kaikista, voimme muotoilla tapahtuman

$$\{N(s+t) - N(s) = i, N(s) = k\} = \{0 \le U < \widetilde{T}_1 \le \widetilde{S}_i \le U + t < \widetilde{S}_{i+1}\},$$

kun

$$U := s - S_k, \widetilde{T}_j := T_{k+j}, \text{ ja } \widetilde{S}_j := \widetilde{T}_1 + \ldots \widetilde{T}_j.$$

Nyt U on riippumaton kaikista satunnaismuuttujista $\widetilde{T}_j \sim \mathrm{Exp}\,(\,\lambda\,)$. Jos merkitsemme satunnaismuuttujan U tiheysfunktioita funktiolla g, niin riippumattomuuden nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(0 \le U < \widetilde{T}_1 \le \widetilde{S}_i \le U + t < \widetilde{S}_{i+1}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\,0 \le u\,] \mathbf{P}\left(u < \widetilde{T}_1 \le \widetilde{S}_i \le u + t < \widetilde{S}_{i+1}\right) g(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\,0 \le u\,] \mathbf{P}\left(u < \widetilde{T}_1\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{T}_1 \le \widetilde{S}_i \le t + u < \widetilde{S}_{i+1} \,|\, \widetilde{T}_1 > u\right) g(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\,0 \le u\,] \mathbf{P}\left(u < \widetilde{T}_1\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{T}_1 \le \widetilde{S}_i \le t < \widetilde{S}_{i+1}\right) g(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Edellisen kaavan viimeinen yhtäsuuruus on unohtavaisuusominaisuuden suoraviivainen yleistys (induktiolasku jonka jätämme harjoitustehtäväksi). Koska $\mathbf{P}\left(\widetilde{T}_1 \le \widetilde{S}_i \le t < \widetilde{S}_{i+1}\right) = \mathbf{P}\,(\,N(t) = i\,)$ ja riippumattomuuden nojalla myös

$$\int_{\mathbb{R}} [\,0 \le u\,] \mathbf{P}\left(u < \widetilde{T}_1\right) g(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{P}\left(0 \le U < \widetilde{T}_1\right) = \mathbf{P}\,(\,S_k \le s < S_{k+1}\,)\,,$$

niin olemme päätelleet, että

$$\mathbf{P}\,(\,N(s+t) - N(s) = i, N(s) = k\,) = \mathbf{P}\,(\,N(t) = i\,)\,\mathbf{P}\,(\,N(s) = k\,)\,,$$

joten väite seuraa ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä. □

Tällä tuloksella on myös mielenkiintoinen ja hyvin käyttökelpoinen seuraus, jonka mukaan Poissonin prosessin lisäykset $N(t) - N(s)$ ja $N(v) - N(u)$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jos avoimet välit (s, t) ja (v, u) eivät leikkaa toisiaan.

6.15. **Seuraus.** *Poissonin prosessin lisäykset ovat riippumattomia.*

Todistus. Jos $s < t < v$, niin $X := N(t) - N(s)$ ja $Y := N(v) - N(t)$ ovat riippumattomia, sillä

$$\mathbf{P}\,(\,X = i, Y = k\,) = \sum_{j \ge 0} \mathbf{P}\,(\,N(t) = i + j, N(s) = j, N(v) - N(t) = k\,)\,.$$

Ehdollistamalla saamme Markov-ominaisuuden[10] avulla

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\,(\,N(v)-N(t)=k\,|\,N(t)=i+j, N(s)=j\,)\\&=\mathbf{P}\,(\,N(v)-N(t)=k\,|\,N(t)=i+j\,)=\mathbf{P}\,(\,N(v-t)=k\,)\,,\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\,X=i, Y=k\,)&=\sum_{j\geq 0}\mathbf{P}\,(\,N(t)-N(s)=i, N(s)=j\,)\,\mathbf{P}\,(\,N(v-t)=k\,)\\&=\mathbf{P}\,(\,N(t)-N(s)=i\,)\,\mathbf{P}\,(\,N(v-t)=k\,)\\&=\mathbf{P}\,(\,X=i\,)\,\mathbf{P}\,(\,N(v-t)=k\,)\end{aligned}$$

Summaamalla yli tilan i, voimme siis todeta, että

$$\mathbf{P}\,(\,Y=k\,)=\sum_{i}\mathbf{P}\,(\,X=i, Y=k\,)=\mathbf{P}\,(\,N(v-t)=k\,)\,,$$

joten

$$\mathbf{P}\,(\,X=i, Y=k\,)=\mathbf{P}\,(\,X=i\,)\,\mathbf{P}\,(\,Y=k\,)\,.$$

$\square$

Yhdistämällä nämä kaksi tietoa, voimme osoittaa harjoituksissa (Harjoitus 5.4.) esiintyvän tiedon, minkä mukaan jos $(t, s) \subset (u, v)$, niin lisäyssatunnaismuuttuja $N(t)-N(s)$ on binomijakautunut, ehdolla, että tiedämme, että $N(u)-N(v)=n$.

[10] itse asiassa emme osoittaneet, että historian voi unohtaa, mutta tämä on helppo lisätä edellisen lauseen ”todistukseen”