5. Lauseen 4.6 todistus

Tämän kappaleen tavoitteena on osoittaa Lause 4.6. Osoitamme sen kahden aputuloksen avulla. Molemmat niistä perustuvat *positiivisesti palautuvan* tilan käsitteeseen.

5.1. **Määritelmä.** Tila $\alpha \in S$ on *positiivisesti palautuva*, jos odotusarvo $\mathbf{E}_\alpha \tau_\alpha < \infty$, missä $\tau_\alpha = \min\{ n \geq 1 : \ X_n = \alpha \}$ on ensimmäinen osumishetki tilaan α ja

$$\mathbf{E}_\alpha \tau_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P}_\alpha (\tau_\alpha = n)$$

on osumishetken τ_α odotusarvo, kun lähdemme tilasta α.

Osoittautuu, että positiivisesti palautuvan tilan pelkkä olemassaolo takaa tasapainojakauman olemassaolon.

5.2. **Lemma.** *Jos Markovin ketjulla on positiivisesti palautuva tila α, niin sillä on myös tasapainojakauma.*

Todistus. Merkitään

$$\mu_k := \mathbf{E}_\alpha \# \{ 0 \leq n < \tau_\alpha : \ X_n = k \}$$

jokaisella $k \in S$. Nyt $\mu_\alpha = 1$, sillä $X_0 = \alpha$. Luku μ_k on siis keskimääräinen vierailujen lukumäärä tilassa k ennen palaamista positiivisesti palautuvaan tilaan α. Osoitamme, että μ_k on lähes tasapainojakauma, eli osoitamme että

$$\mu_k = \sum_j \mu_j p_{jk}. \tag{5.3}$$

Emme vielä vaadi, että (μ_k) on todennäköisyyjakauma. Oletetaan ensin, että $k \neq \alpha$. Tällöin

$$\mu_k = \mathbf{E}_\alpha \sum_{n=0}^{\tau_\alpha - 1} [X_n = k] = \mathbf{E}_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} [X_n = k \text{ ja } n < \tau_\alpha]$$

Koska $k \neq \alpha$, niin $[X_0 = k \text{ ja } 0 < \tau_\alpha] = 0$. Voimme siis kirjoittaa summan muodossa

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mathbf{E}_\alpha [X_1 = k, 1 < \tau_\alpha] + \mathbf{E}_\alpha \sum_{n=2}^{\infty} [X_n = k, n < \tau_\alpha] \\ &= \mathbf{P}_\alpha (X_1 = k) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}_\alpha (X_n = k, n < \tau_\alpha) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ensimmäinen todennäköisyys on vain siirtymätodennäköisyys $p_{\alpha k} = \mu_\alpha p_{\alpha k}$. Jälkimmäiseen summaan lisäämme tiedon $\{X_{n-1} = j, j \neq \alpha\}$, joten

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}_\alpha(X_n = k, n < \tau_\alpha) &= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j\neq\alpha} \mathbf{P}_\alpha(X_{n-1} = j, X_n = k, n < \tau_\alpha) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j\neq\alpha} \mathbf{P}_\alpha(X_{n-1} = j, n-1 < \tau_\alpha, X_n = k)\end{aligned}$$

Viimeisin identiteetti seuraa tiedosta, että kun $X_n = k \neq \alpha$, niin $\tau_\alpha \neq n$. Siispä $\{X_n = k, \tau_\alpha > n-1\} \subset \{X_n = k, \tau_\alpha > n\}$ ja siten tapahtumat ovat samat, sillä toinen suunta on selviö. Koska tapahtuman $\{\tau_\alpha > n-1\}$ sattumisen voi selvittää tiedosta Markovin ketjun X historiasta ajanhetkeen $n-1$ mennessä, niin Markov-ominaisuuden nojalla

$$\mathbf{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = j, \tau_\alpha > n-1) = \mathbf{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = j) = p_{jk}.$$

Yhdistämällä nämä tiedot saamme siis

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}_\alpha(X_n = k, n < \tau_\alpha) = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j\neq\alpha} \mathbf{P}_\alpha(X_{n-1} = j, n-1 < \tau_\alpha, X_n = k) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j\neq\alpha} \mathbf{P}_\alpha(X_{n-1} = j, n-1 < \tau_\alpha)\,\mathbf{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = j, \tau_\alpha > n-1) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j\neq\alpha} \mathbf{P}_\alpha(X_{n-1} = j, n-1 < \tau_\alpha)\,p_{jk} \\ &= \sum_{j\neq\alpha} p_{jk} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}_\alpha(X_n = j, m < \tau_\alpha) = \sum_{j\neq\alpha} p_{jk}\mu_j.\end{aligned}$$

Viimeinen identiteetti on kaava (5.4) sovellettuna toiseen suuntaan. Siispä väitteemme (5.3) on voimassa ainakin, kun $k \neq \alpha$.

Oletamme seuraavaksi, että $k = \alpha$. Tällöin $\mu_\alpha = 1 = \mathbf{P}_\alpha(\tau_\alpha < \infty)$. Edelleen huomaamme, että $\{\tau_\alpha = n\} = \{X_n = \alpha, \tau_\alpha \geq n\} = \{X_n = \alpha, \tau_\alpha > n-1\}$. Koska

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\alpha(\tau_\alpha < \infty) &= \mathbf{P}_\alpha(\tau_\alpha = 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}_\alpha(\tau_\alpha = n) \\ &= \mathbf{P}_\alpha(X_1 = \alpha) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}_\alpha(X_n = \alpha, \tau_\alpha > n-1),\end{aligned}$$

niin toimimalla kuin edellisessä tapauksessa $k \neq \alpha$, voimme lisätä tapahtuman $\{X_{n-1} = j \neq \alpha\}$ ja käyttää Markov-ominaisuutta. Saamme siten

$$\begin{aligned}\mu_\alpha &= p_{\alpha\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j\neq\alpha} \mathbf{P}_\alpha\,(\,X_{n-1} = j, \tau_\alpha > n-1\,)\,\mathbf{P}\,(\,X_n = \alpha \,|\, X_{n-1} = j\,) \\ &= p_{\alpha\alpha} + \sum_{j\neq\alpha} p_{j\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_\alpha\,(\,X_n = j, \tau_\alpha > n\,) = p_{\alpha\alpha} + \sum_{j\neq\alpha} p_{j\alpha}\mu_j,\end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa taas kaavasta (5.4). Olemme siten osoittaneet väitteen (5.3) pitävän paikkaansa.

Tästä ei ole enää pitkälti lemman väitteeseen, sillä voimme *skaalata* luvut μ_j siten, että niistä syntyy todennäköisyyjakauma. Merkitään siis

$$\pi_j = \frac{\mu_j}{C} \quad \Longrightarrow 1 = \sum_j \pi_j = \frac{1}{C}\sum_j \mu_j \quad \Longrightarrow C = \sum_j \mu_j.$$

Koska $\mu_\alpha = 1$, niin varmasti $C > 0$. Mutta voiko $C = \infty$? Lemman oletuksesta seuraa, ettei näin ole, sillä

$$\begin{aligned}C &= \sum_{j\in S} \mathbf{E}_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} [\,X_n = j, \tau_\alpha > n\,] = \mathbf{E}_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} [\,X_n \in S, \tau_\alpha > n\,] \\ &= \mathbf{E}_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} [\,\tau_\alpha > n\,] = \mathbf{E}_\alpha \sum_{n=0}^{\tau_\alpha - 1} 1 = \mathbf{E}_\alpha\, \tau_\alpha < \infty.\end{aligned}$$

Siispä kysytty todennäköisyyjakauma on

$$\pi_j = \frac{\mathbf{E}_\alpha \,\#\{\,0 \le n < \tau_\alpha :\; X_n = j\,\}}{\mathbf{E}_\alpha\, \tau_\alpha}.$$

Huomaamme vielä, että erityisesti $\pi_\alpha = 1/\mathbf{E}_\alpha\, \tau_\alpha$. □

Voimme nyt osoittaa aputuloksen, jonka todistus todistaa samalla myös Lauseen 4.6.

5.5. **Lemma.** *Oletetaan, että Lauseen 4.6 sivulla 37 oletukset ovat voimassa. Tällöin jokainen joukon B tila $j \in B$ on positiivisesti palautuva ja lisäksi on olemassa yksikäsitteinen tasapainojakauma, joka on keskittynyt joukkoon B.*

Todistus. Olemassaolon osoittamiseksi on näytettävä, että vapaasti valittu $j \in B$ toteuttaa ehdon

$$\mathbf{E}_j\, \tau_j < \infty.$$

Koska joukon B kaikki tilat kommunikoivat, niin kutakin paria $i, j \in S$ kohti löytyy sellainen ajanhetki $n = n(i,j) \in \mathbb{N}$, että

$$p_{ij}^{(n(i,j))} > 0.$$

Koska B on äärellinen, niin olkoon sen koko $d := \#B$. Pareja (i,j) on siten tarkalleen d^2 kappaletta, joten niistä voidaan valita suurin

$$N := \max_{i,j \in S} n(i,j) < \infty.$$

Vastaavasti on olemassa pienin siirtymätodennäköisyys

$$\delta := \min_{i,j \in S} p_{ij}^{(n(i,j))} > 0.$$

Koska

$$\mathbf{P}_i\,(\,\tau_j \le N\,) = \mathbf{P}_i\,(\,X_n = j \text{ jollakin } n \le N\,) \ge \mathbf{P}_i\left(\,X_{n(i,j)} = j\,\right) = p_{ij}^{(n(i,j))},$$

niin voimme päätellä, että

$$\delta \le \mathbf{P}_i\,(\,\tau_j \le N\,) \quad \text{jokaisella } i,j \in B. \tag{5.6}$$

Komplementtitapahtumalle saamme siten arvion

$$\mathbf{P}_i\,(\,\tau_j > N\,) \le 1 - \delta < 1 \quad \text{jokaisella } i,j \in B. \tag{5.7}$$

Markov-ominaisuuden nojalla voimme päätellä tästä (HT. mieti yksityiskohdat), että

$$\mathbf{P}_i\,(\,\tau_j > kN\,) \le (1-\delta)^k \quad \text{jokaisella } i,j \in B. \tag{5.8}$$

Todistuksen ideana on tarkastella ”pitkiä” aikavälejä $[0,N]$, $(N,2N]$, $(2N,3N]$ jne. Odotusarvo voidaan jakaa näiden välien mukaan suotuisiin osiin:

$$\mathbf{E}_j\,\tau_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_j\,(\,\tau_j \ge n\,) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}_j\,(\,\tau_j \ge lN + k\,)$$

Koska jokaisella $k = 1,\ldots,N$ on voimassa $\mathbf{P}_j\,(\,\tau_j \ge lN+k\,) \le \mathbf{P}_j\,(\,\tau_j > lN\,)$, niin saamme odotusarvolle arvion

$$\mathbf{E}_j\,\tau_j \le N \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}_j\,(\,\tau_j > lN\,)\,.$$

Yhdistämällä tähän arvio (5.8) saamme

$$\mathbf{E}_j\,\tau_j \le N \sum_{l=0}^{\infty} (1-\delta)^l = N/\delta < \infty.$$

Siis Lemman 5.2 nojalla tasapainojakauma on olemassa. Tasapainojakauman yksikäsitteisyyden osoituksen pilkomme harjoitustehtäväksi. □

Osoitamme vielä yhden aputuloksen, joka osoittaa, että jokaisella äärelllisellä Markovin ketjulla on absorboiva ja kommunikoiva osajoukko.

5.9. **Lemma.** *Olkoon (X_n) äärellinen Markovin ketju. Tällöin on olemassa absorboiva ja kommunikoiva joukko $B \subset S$.*

Todistus. Olkoon $i, j \in S$ mielivaltaisia tiloja. Merkitsemme, että $i \to j$ jos $p_{ij}^{(n)} > 0$ jollakin $n \geq 0$. Edelleen merkitsemme, että $i \leftrightarrow j$ (ja sanomme, että i ja j kommunikoivat), jos sekä $i \to j$ että $j \to i$.

Havaitsemme, että merkinnöillä $i \to j$ ja $i \leftrightarrow j$ on seuraavat ominaisuudet:

a) jos $i = j$, niin

$$p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$$

joten aina $i \to i$. Erityisesti tästä seuraa myös, että $i \leftrightarrow i$.

b) jos $i \to j$ ja $j \to k$, niin $i \to k$

c) jos $i \leftrightarrow j$ ja $j \leftrightarrow k$, niin $i \leftrightarrow k$

d) jos $i \leftrightarrow j$, niin $j \leftrightarrow i$

Kohdan *b*) osoittaminen implikoi kohdan *c*) välittömästi. Lisäksi kohta *d*) on selviö. Näytämme vain kohdan *b*). Jos siis $i \to j$ ja $j \to k$, niin löytyy sellaiset ajanhetket n, m, että

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{ja} \quad p_{jk}^{(m)} > 0$$

Koska

$$p_{ik}^{(n+m)} = \mathbf{P}_i\,(\,X_{n+m} = k\,) \geq \mathbf{P}_i\,(\,X_n = j, X_{n+m} = k\,) = p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

niin kohdat *a*), *b*), *c*) ja *d*) on osoitettu.

Kohtien *b*), *c*) ja *d*) nojalla relaatio $i \leftrightarrow j$ on ekvivalenssirelaatio, joten se osittaa tilajoukon S pistevieraisiin ekvivalenssiluokkiin $C(i)$, missä

$$C(i) := \{\, j \in S : \; i \leftrightarrow j \,\}.$$

Lisäksi kukin ekvivalenssiluokka $C(i)$ on kommunikoiva joukko, sillä jos $j, k \in C(i)$, niin $i \leftrightarrow j$ ja $i \leftrightarrow k$, joten kohtien *c*) ja *d*) perusteella $j \leftrightarrow k$.

Koska tilajoukko on äärellinen, niin sen ositukset myös äärellisiä. Löytyy siis sellaiset tilat $i_1, \ldots, i_K \in S$, että $C_k := C(i_k)$ ovat pistevieraita ja

$$S = \bigcup_{k=1}^{K} C_k.$$

Näytämme nyt, että jokin joukoista C_k on absorboiva. Merkitsemme nyt, että

$$C_k \to C_l, \text{ jos löytyy sellaiset tilat } i \in C_k \text{ ja } j \in C_l, \text{ että } i \to j.$$

Havaitsemme, että tällä nuolella on seuraavat ominaisuudet:

e) $C_i \to C_i$ jokaisella $i = 1, 2, \ldots, K$.

f) jos $C_i \to C_j$ ja $C_j \to C_k$, niin $C_i \to C_k$

g) jos $C_i \to C_j$ ja $C_j \to C_i$, niin $C_i = C_j$.

Jätämme näiden osoittamisen harjoitustehtäväksi. Tilajoukot $C_1, \ldots, C_k$ muodostavat siten verkon, missä ei ole yhtään silmukkaa. Muodostamme nyt rekursiivisesti sellaisen polun $(i_1, \ldots, i_m)$, että $C_{i_1} \to C_{i_2} \to \ldots C_{i_m}$ ja $C_{i_m} \not\to C_j$ millään j. Joukko C_{i_m} on siten absorboiva, sillä sieltä ei ole siirtymänuolta joukon C_{i_m} ulkopuolelle.

Merkitään $I(k) := \{\ i \neq k :\ C_k \to C_i\ \}$. Luku $a_k = \#I(k)$ on tällöin nuolien lukumäärä ulos joukosta C_k. Jos $a_k = 0$, niin joukosta ei ole siirtymänuolia ulospäin, joten tällöin kyseinen joukko on absorboiva. Osoitamme nyt, että jollakin k luku $a_k = 0$. Tämä on helppo päätellä seuraavasti.

Jos $j \in I(k)$, niin $I(j) \subset I(k)$, sillä $C_k \to C_j \to C_i$ jokaisella $i \in I(j)$. Toisaalta $I(j) \neq I(k)$, sillä luku $j \in I(k)$, mutta $j \notin I(j)$. Siispä $a_j < a_k$ aina, kun $I(k) \neq \emptyset$ ja $j \in I(k)$. Koska $I(k) \subset \{1, 2, \ldots, K\}$, niin $a_k \leq K - 1$ jokaisella k.

Jos nyt teemme vastaoletuksen, että $I(k) \neq \emptyset$ jokaisella k, niin $a_k > 0$ kaikilla k. Erityisesti löydämme sellaisen luvun j, että $a_j = \min\{\ a_k :\ k = 1, \ldots, K\ \}$. Koska vastaoletuksen mukaan $a_j > 0$, joten löytyy jokin $i \in I(j) \neq \emptyset$. Mutta tällöin $a_i < a_j$, mikä on ristiriidassa luvun j määritelmän kanssa. Siispä vastaoletuksen täytyy olla väärä ja jollakin k joukko $I(k) = \emptyset$. Siispä vastaava kommunikoiva joukko C_k on absorboiva. Tämä osoittaakin väitteen. $\square$