4. Tasapainojakauma

Tässä kappaleessa (X_n) on Markovin ketju (aivan kuten aikaisemminkin). Tarkastelemme seuraavaksi tilannetta, missä ketjun tilajakaumat eivät muutu (tai muuttuvat hyvin vähän) ajan kuluessa.

4.1. **Määritelmä.** Olkoon $\pi = (\pi_i)_{i\in S}$ todennäköisyysjakauma tilajoukolla S. Jakauma π on Markovin ketjun (X_n) *tasapainojakauma* (josta käytämme lyhennettä TP-jakauma), jos

$$\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j, \quad \text{jokaisella } j \in S. \tag{4.2}$$

Jos jakaumaa π ajatellaan vaakavektorina, niin ehto (4.2) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\pi P = \pi. \tag{4.3}$$

Tasapainojakauma toteuttaa kappaleen alussa esittämämme toiveen. Oletetaan, että Markovin ketjun X alkujakauma on tasapainojakauma π eli oletamme, että $\mathbf{P}\,(\,X_0 = i\,) = \pi_i$ jokaisella tilalla $i \in S$. Tällöin jakauma hetkellä $n = 1$ on sama, sillä

$$\mathbf{P}\,(\,X_1 = i\,) = \sum_k \mathbf{P}\,(\,X_0 = k, X_1 = i\,) = \sum_k \mathbf{P}\,(\,X_0 = k\,)\,p_{ki} = \sum_k \pi_k p_{ki} = \pi_i$$

jokaisella tilalla $i \in S$. Yleisemmin on voimassa, että $\mathbf{P}\,(\,X_n = i\,) = \pi_i$ jokaisella tilalla $i \in S$ ja ajanhetkellä n, sillä iteroimalla edellistä laskua havaitsemme, että $\pi P^n = \pi$ jokaisella ajanhetkellä n.

Mitä hyötyä tasapainojakaumasta on? Tasapainojakauman avulla voimme tarkastella, kuinka Markovin ketju käyttäytyy keskimäärin pitkillä aikaväleillä. Kun ketju siirtyy tilasta toiseen, niin pitkillä aikaväleillä se pääsee kulkemaan lähes kaikkiin tiloihin. Määrittelemmekin seuraavaksi tilat joihin Markovin ketju ylipäänsä voi päästä.

4.4. **Määritelmä.** Sanomme, että tilat $i, j \in S$ *kommunikoivat*, jos $i = j$ tai jos joillakin ajahetkillä n ja m siirtymätodennäköisyydet $p_{ij}^{(n)} > 0$ ja $p_{ji}^{(m)} > 0$.

Havaitsemme, että jos tilat i ja j eivät kommunikoi, niin jommasta kummasta tilasta ei ole polkua toiseen tilaan. Eli jos esimerkiksi $p_{ij}^{(n)} = 0$ jokaisella ajanhetkellä n, niin tilasta i ei voi päästä tilaan j.

Äärellisen tilajoukon S tapauksessa voimme ajatella tilajoukkoa joukkona nimettyjä pisteitä. Kun siirtymätodennäköisyys $p_{ij} > 0$, niin voimme ajatella, että pisteestä i kulkee nuoli pisteeseen j. Tällaista joukkoa, jossa on nuolia pisteistä toisiin sanotaan *suunnatuksi verkoksi*. Nimitämme tätä suunnattua verkkoa, jonka kuhunkin nuoleen on liitetty mukaan siirtymän todennäköisyys, ketjun *tiladiagrammiksi.*

Jos $p_{ij}^{(n)} > 0$, niin pisteestä i kulkee polku pisteeseen j. Koska määrittelimme aiemmin $p_{ij}^{(0)} = [\, i = j \,]$, niin olisimme voineet vain todeta, että tilat i ja j kommunikoivat, jos niiden välillä on polku molempiin suuntiin. Tapauksessa $i = j$ tämä polku on ”tyhjä” polku.

Voimme siis ajatella, että erilliset tilat kommunikoivat, jos niiden välillä on nuolien muodostamat polut kumpaankin suuntaan. Tilat eivät kommunikoi, jos toisesta tilasta ei pääse toiseen.

Jos taas kaikki tilat kommunikoivat keskenään, niin tällöin Markovin ketju voi päästä mistä tahansa tilasta toiseen. Annamme tälle käsitteelle seuraavaksi nimen.

4.5. **Määritelmä.** Markovin ketju (X_n) on *pelkistymätön* (englanniksi *irreducible*) jos kaikki tilat kommunikoivat eli kaikilla tiloilla $i, j \in S$ siirtymätodennäköisyys $p_{ij}^{(n)} > 0$ jollakin ajanhetkellä n.

Osoitamme seuraavaksi, että kun tilajoukko S on äärellinen ja (X_n) on pelkistymätön, niin ketjulla on tasapainojakauma. Osoitamme tämän väitteen kuitenkin hieman yleisemmin. Emme oleta, että S on äärellinen, vaan että se sisältää äärellisen absorptiojoukon, joka tilajoukoksi tulkittuna on pelkistymätön.

4.6. **Lause.** *Oletetaan, että*

- *$B \subset S$ on äärellinen ja absorboiva tilajoukko ja*
- *joukon B tilat kommunikoivat eli kun $i, j \in B$, niin jollakin ajanhetkellä n, siirtymätodennäköisyys $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Tällöin löytyy sellainen tasapainojakauma π, joka on keskittynyt *joukkoon B eli*

$$\pi P = \pi \quad \textit{ja} \quad \pi_i = 0 \textit{ jokaisella } i \notin B$$

Tämän lauseen todistus on pitkähkö ja se jaetaan pienempiin osiin sekä apuväittämiin, joiden todistuksista Lauseen 4.6 todistus sitten seuraa.

Välittömänä seurauksena tästä lauseesta on seuraava tulos.

4.7. **Seuraus.** *Oletetaan, että Markovin ketju (X_n) on* äärellinen *(eli sen tilajoukko S on äärellinen) ja (X_n) on pelkistymätön. Tällöin on olemassa tasapainojakauma π.*

Todistus. Voimme valita joukoksi B lauseessa 4.6 koko tilajoukon S. □

Myöhemmin osoitamme, että edellisen seurauslauseen oletus pelkistymättömyydestä on turha, sillä tulemme osoittamaan, että jokaisella äärellisellä

Markovin ketjulla on aina vähintään yksi absorboiva ja kommunikoiva joukko $B \subset S$. Siispä tästä seuraa yhdessä Lauseen 4.6 kanssa, että

4.8. **Seuraus.** *Äärellisellä Markovin ketjulla on aina jokin tasapainojakauma.*

Ennenkuin aloitamme todistamaan näitä tuloksia, käsittelemme kaksi tasapainojakaumiin liittyvää käsitettä: *ergodisuuden* ja *kääntyvyyden.*

Ergodisuus vastaa kysymykseen siitä, kuinka Markovin ketju käyttäytyy pitkillä aikaväleillä. Oletamme, että Markovin ketjulla (X_n) on *yksikäsitteinen tasapainojakauma* π. Merkitsemme

$$N_j(n) := \#\{\, 0 \le m < n :\ X_m = j \,\}$$

eli satunnaismuuttuja $N_j(n)$ on tilassa j käyntien kokonaislukumäärä aikavälillä $[0, n-1]$. Merkitsemme

$$\widehat{\pi}_j(n) := \frac{N_j(n)}{n}$$

Satunnaismuuttuja $\widehat{\pi}_j(n)$ on siis "tilassa j käyntien suhteellinen lukumäärä välillä $[0, n-1]$". Tekemillämme oletuksilla on voimassa seuraava tulos.

4.9. **Lause** (Ergodilause)**.** *Olkoon Markovin ketjulla (X_n) yksikäsitteinen tasapainojakauma π. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\pi}_j(n) = \pi_j$$

Todistus. Tämän lauseen todistuksen sivuutamme. □

Ergodisuuden nojalla havaitsemme, että keskimäärin ketju vierailee tilassa j ennen ajanhetkeä n noin $\pi_j n$ kertaa. Havaitsemme siten, että niissä tiloissa missä tasapainojakauma on suurimmillaan ketju vierailee useammin ja vastaavasti, jos tasapainojakauma saa pienen arvon, ketju vierailee harvemmin.

Esittelemme vielä käsitteen *kääntyvyys* (englanniksi *reversibility*).

4.10. **Määritelmä.** Markovin ketju X_n on *kääntyvä*, jos löytyy sellainen todennäköisyysjakauma $\lambda = (\lambda_i)_{i\in S}$, että

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji} \tag{4.11}$$

jokaisella $i, j \in S$.

Kääntyvyys on tasapainojakauman olemassaoloa vahvempi ominaisuus.

4.12. **Lause.** *Jos Markovin ketju on kääntyvä, niin $\lambda = \pi$ on sen tasapainojakauma.*

Todistus. Suoraan laskemalla näemme, että

$$\sum_{i \in S} \lambda_i p_{ij} = \sum_{i \in S} \lambda_j p_{ji} = \lambda_j \sum_{i \in S} p_{ji} = \lambda_j,$$

joten λ on tasapainojakauma. □