## 2. Absorptiotodennäköisyydet

2.1. **Esimerkki** (Rahapeli). Kaksi pelaajaa pelaavat jotakin kahden hengen peliä, jossa pelaajan $A$ voittotodennäköisyys on $p$ ja pelaajan $B$ voittotodennäköisyys on $q = 1 - p$.

Kun pelaaja $A$ voittaa, pelaaja $B$ maksaa hänelle yhden euron. Vastaavasti pelaajan $A$ hävitessä, pelaaja $B$ saa yhden euron pelaajalta $A$. Peli jatkuu, kunnes pelaaja $A$ häviää kaikki rahansa tai voittaa $d$ euroa (esim. pelaajan $B$ kaikki rahat).

Tämän pelin voi mallintaa satunnaiskulkuna äärellisellä välillä $\{0, 1, \ldots, d\}$. Välin ”reunapisteet” 0 ja $d$ muodostavat niin sanotun *absorptiojoukon* $A = \{0, d\}$. Myös joukot $A' = \{0\}$ ja $A'' = \{d\}$ ovat absorptiojoukkoja.

Edellisessä esimerkissä mainittiin käsite absorptiojoukko. Määrittelemme sen nyt tarkemmin.

2.2. **Määritelmä.** Olkoon $A \subset S$. Joukko $A$ on *absorptiojoukko*, jos $p_{ij} = 0$ aina, kun $i \in A$ ja $j \in A^C$.

Absorptiojoukko on siis sellainen joukko, josta Markovin ketju ei poistu sinne saavuttuaan. Tämä seuraa havainnosta, että

$$\mathbf{P}\,(\,X_1 \in A \,|\, X_0 = i\,) = 1 \quad \text{aina, kun } i \in A \text{ ja } A \text{ on absorptiojoukko.} \tag{2.3}$$

Toisaalta, jos joukko $A$ toteuttaa ehdon (2.3), niin myös

$$p_{ij} = \mathbf{P}\,(\,X_1 = j \,|\, X_i = i\,) \le \mathbf{P}\left(\,X_1 \in A^C \,|\, X_i = i\,\right) = 0,$$

aina kun $i \in A$ ja $j \in A^C$.

2.4. *Huomautus.* Joukko $A$ on siis absorptiojoukko jos ja vain jos se toteuttaa ehdon (2.3).

Edelleen havaitsemme, että

$$\sum_{j \in A} p_{ij} = \mathbf{P}\,(\,X_1 \in A \,|\, X_0 = i\,) = 1, \quad \text{aina, kun } i \in A,$$

joten

2.5. *Huomautus.* jos $A$ on absorptiojoukko, niin se voidaan tulkita Markovin ketjun tilajoukoksi. Koska $\lambda^{(n)} = \lambda P^{(n)}$, niin $\mathbf{P}\,(\,X_n \in A \,|\, X_0 = i\,) = 1$ jokaisella ajanhetkellä $n$.

Otamme jatkossa käyttöön merkinnän:

2.6. **Merkintä.** Kun Markovin ketju lähtee tilasta $i$, niin merkitsemme

$$\mathbf{P}_i\,(\,A\,) := \mathbf{P}\,(\,A \,|\, X_0 = i\,)\,.$$

2.7. **Esimerkki** (Sukupuuttoon kuoleminen). Jos $(X_n)$ on Markovin ketju, joka kuvaa populaation kokoa eli $X_n =$ "populaation koko sukupolvessa $n$", niin tilajoukoksi $S$ voimme siis valita luonnolliset luvut $\mathbb{N}$. Jos jossakin sukupolvessa, sanotaan vaikka sukupolvessa $n$, populaation koko on 0, niin seuraavien "sukupolvien" koko on myös 0, sillä uusia jälkeläisiä ei voi enää syntyä. Siispä tässä mallissa joukko $A = \{0\}$ on absorptiojoukko ja tila 0 on *absorboiva tila.*

Nyt kun absorption käsite on esitelty, voimme esitellä *absorptiohetken.* Oletamme jatkossa, että $A$ on absorptiojoukko.

2.8. **Määritelmä.** *Absorptiohetki* $T_A$ on satunnainen ajanhetki

$$T_A := \min\{\, n \in \mathbb{N} : \ X_n \in A \,\}.$$

Lisäksi teemme sopimuksen, että $\min \emptyset = \infty$ eli $T_A = \infty$, jos $X_n \notin A$ jokaisella ajanhetkellä $n$.

Absorptiohetki $T_A$ on aina hyvin määritelty. Lisäksi huomaamme, että jos $n \geq T_A$, niin $X_n \in A$, sillä saavuttuaan absorptiojoukkoon Markovin ketju $(X_n)$ ei enää poistu sieltä. Absorptiohetken avulla voimme helposti esittää tapahtumat

$$\{\text{absorptio tapahtuu joskus}\} = \{T_A < \infty\} \quad \text{ja}$$
$$\{\text{absorptiota ei koskaan tapahdu}\} = \{T_A = \infty\}.$$

Tarkastelemme seuraavaksi kysymystä, millä todennäköisyydellä absorptio tapahtuu, jos lähdemme tilasta $i \in S$.

2.9. **Merkintä.** Absorptiotodennäköisyyttä lähtötilasta $i$ merkitsemme

$$h_{iA} := \mathbf{P}_i\,(\,T_A < \infty\,)\,.$$

Jos absorptiojoukko $A = \{j\}$, niin merkitsemme $h_{ij} := h_{i\{j\}}$.

2.10. **Esimerkki** (Jatkoa esimerkkiin 3.26). Rahapelissä absorptiotodennäköisyys $h_{i\{0\}} = h_{i0}$ absorptiojoukkoon $\{0\}$ kuvaa pelaajan $A$ häviön todennäköisyyttä, kun pelaajan $A$ alkupääoma on $i$ euroa.

Pyrimme seuraavaksi määräämään absorptiotodennäköisyyden käyttämällä siirtymätodennäköisyyksiä. Voimme tämän sovelluksena laskea rahapelissä pelaajan $A$ häviön sekä voiton todennäköisyydet pelaajien alkupääomien funktioina.

Suoraan laskemalla näemme, että

$$\begin{aligned} h_{iA} &= \mathbf{P}_i\,(\,T_A < \infty\,) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}_i\,(\,T_A = m\,) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m \leq n} \mathbf{P}_i\,(\,T_A = m\,) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_i\,(\,T_A \leq n\,)\,. \end{aligned}$$

Siis $h_{iA}$ saadaan raja-arvona tapahtumien $\{T_A \leq n\}$ todennäköisyyksistä eli tapahtumien "absorptio on tapahtunut ennen hetkeä $n$" todennäköisyyksistä. Tämä tapahtuma on helposti esitettävissä siirtymätodennäköisyyksien avulla. Huomaamme, että

$$X_n \in A \Longrightarrow T_A \leq n,$$

sillä jos $X_n \in A$, niin määritelmän nojalla $T_A \leq n$. Toisaalta, jos $T_A \leq n$, niin tiedämme jo, että $X_n \in A$. Siispä tapahtumat

$$\{X_n \in A\} = \{T_A \leq n\},$$

joten

$$h_{iA} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_i\,(\,T_A \leq n\,) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_i\,(\,X_n \in A\,) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in A} p_{ij}^{(n)}. \tag{2.11}$$

Edellinen kaava liittää absorptiotodennäköisyyden ja siirtytodennäköisyydet keskenään, joten periaatteessa todennäköisyys $h_{iA}$ on määrättävissä. Mutta raja-todennäköisyys $h_{iA}$ on myös määrättävissä toisellakin tavalla. Tätä varten tarvitsemme *harmonisuuden* käsitteen, joka on hyvin lähellä kompleksianalyysistä tutun käsitteen kanssa.

2.12. **Määritelmä.** Olkoon $h$ pystyvektori,

$$h = \begin{pmatrix} h_0, \\ h_1, \\ h_2, \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ja oletetaan, että $0 \leq h_i \leq 1$. Vektori $h$ on *harmoninen*, jos

$$h_i = \sum_{j\in S} p_{ij} h_j, \quad i \in S$$

eli jos $h = Ph$.

Harmoninen pystyvektori on siis siirtymätodennäköisyysmatriisin $P$ jokin kiintopiste. Voimme myös ajatella sitä matriisin $P$ ominaisvektorina. Kuinka vain, harmoninen pystyvektori on lineaarisen yhtälön $x = Px$ eräs ratkaisu. Ensimmäisenä herää kysymys, onko yhtälöllä ratkaisuja eli onko harmonisia pystyvektoreita olemassa. Havaitsemme kuitenkin, että yksinkertaisia harmonisia vektoreita löytyy aina:

2.13. **Esimerkki.** Olkoon $h_i = 1$ jokaisella $i \in S$. Tällöin

$$\sum_{j\in S} p_{ij} h_j = \sum_{j\in S} p_{ij} = 1 = h_i,$$

joten $Ph = h$.

Kertomalla esimerkin vakiovektoria jollakin luvulla $\alpha \in [0,1]$ saamme myös harmonisen vektorin. Jos lisäksi "unohdamme" hetkeksi lisäehdon $0 \le h \le 1$, niin havaitsemme että harmoniset pystyvektorit muodostavat vektoriavaruuden.

Seuraavaksi tarkastelemme, mitä tekemistä harmonisilla pystyvektoreilla on absorptiotodennäköisyyksien kanssa. Merkitään

$$h_A := \begin{pmatrix} h_{0A} \\ h_{1A} \\ h_{2A} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Seuraava lause sanoo, että $h_A$ on aina harmoninen vektori.

2.14. **Lause.** *Pystyvektori $h_A$ on harmoninen. Lisäksi $h_{iA} = 1$ aina, kun $i \in A$.*

*Todistus.* Koska $h_{iA}$ on todennäköisyys absortiolle, on $0 \le h_{iA} \le 1$. Jälkimmäinen väite $h_{iA} = 1$ kun $i \in A$ on helppo: jos kerran $i \in A$, niin $\mathbf{P}_i\,(\,X_n \in A\,) = 1$ jokaisella ajanhetkellä $n$. Siispä kaavan (2.11) nojalla $h_{iA} = \lim 1 = 1$.

On siis vielä näytettävä, että $Ph_A = h_A$. Nyt kaavan (2.11) nojalla

$$\sum_{j\in S} p_{ij}h_{jA} = \sum_j p_{ij} \times \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in A} p_{jk}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_j \sum_{k\in A} p_{ij}p_{jk}^{(n)}.$$

Jos joukko $S$ on äärellinen, niin raja-arvon siirtäminen ulos summasta on taatusti luvallista. Jos $S$ on numeroituvasti ääretön, niin tämä vaatii hieman perusteluja. "Tempun" laillisuuden voi perustella esimerkiksi Monotonisen suppenemisen lauseella (katso ominaisuus (0.5) sivulla 6 ja perustelun yksityiskohdat ovat HT).

Kun raja-arvo on siirretty ulos, on loppu helppoa. Vaihdamme summausjärjestystä[6] ja sovellamme Chapmanin–Kolmogorovin yhtälöitä

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j \sum_{k\in A} p_{ij}p_{jk}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in A} \sum_j p_{ij}p_{jk}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in A} p_{ik}^{(n+1)}.$$

Koska raja-arvossa voimme korvata arvon $n+1$ arvolla $n$, niin edellisen kaavan oikea puoli on

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in A} p_{ik}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in A} p_{ik}^{(n)} = h_{iA}$$

Olemme siis näyttäneet, että $Ph_A = h_A$ ja siis $h_A$ on harmoninen. $\square$

Osoitamme nyt, että että absorptiotodennäköisyys $h_{iA}$ on eräässä mielessä *pienin* yhtälön $Ph = h$ ratkaisuista.

[6] eli sovellamme Fubinin lausetta

2.15. **Lause.** *Olkoon $h$ jokin harmoninen pystyvektori, jolle $h_i = 1$, kun $i \in A$. Tällöin $h_i \geq h_{iA}$ jokaisella $i \in S$.*

*Todistus.* Olkoon $\mathbf{1}_A$ pystyvektori, jolle $\mathbf{1}_{jA} = [\, j \in A \,]$ jokaisella $j \in S$. Käytämme pystyvektoreille $f$ ja $g$ merkintää $f \geq g$ jos $f_i \geq g_i$ jokaisella $i \in S$. Tämä antaa osittaisen järjestyksen pystyvektorien joukossa. Näytämme aluksi, että matriisilla $P^{(n)}$ kertominen säilyttää tämän järjestyksen. Koska $p_{ij}^{(n)} \geq 0$, niin

$$(P^{(n)} f)_i = \sum_j p_{ij}^{(n)} f_j \geq 0$$

aina, kun $f \geq 0$. Siispä

$$f \geq g \Longrightarrow f - g \geq 0 \Longrightarrow P^{(n)}(f - g) \geq 0 \Longrightarrow P^{(n)} f \geq P^{(n)} g \tag{2.16}$$

Nyt voimme aloittaa varsinaisen todistuksen. Lauseen oletuksen mukaan $h_i = 1$ kaikilla $i \in A$ ja muuten $h_i \geq 0$, joten

$$h \geq \mathbf{1}_A. \tag{2.17}$$

Toisaalta indikaattorivektorin $\mathbf{1}_A$ määritelmän nojalla

$$(P^n \mathbf{1}_A)_i = \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} \mathbf{1}_{jA} = \sum_{j \in A} p_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}_i \,(\, X_n \in A \,)\,,$$

Yhdessä kaavan (2.11) kanssa tämä osoittaa, että

$$\lim_{n \to \infty} (P^n \mathbf{1}_A)_i = h_{iA} \quad \text{kun } i \in S. \tag{2.18}$$

Nyt lauseen väite $h \geq h_A$ saadaan arviosta (2.17), kaavasta (2.18) sekä oletuksesta, että $h$ on harmoninen, sillä

$$(P^{(n)} \mathbf{1}_A)_i \leq (P^{(n)} h)_i \leq h_i$$

jokaisella ajanhetkellä $n$, joten myös raja-arvo

$$h_{iA} = \lim_{n \to \infty} (P^{(n)} \mathbf{1}_A)_i \leq h_i.$$

Tämä osoittaakin väitteen. $\square$

Edellisellä lauseella on oivallisia seurauksia, jotka ovat saman kolikon kaksi puolta.

2.19. **Seuraus.** *Oletetaan, että $h \equiv 1$ on ainoa harmoninen pystyvektori, joka toteuttaa lisäehdon $h_i = 1$ jokaisella $i \in A$. Tällöin $h_A \equiv 1$ eli* absorptio on varma jokaisesta lähtötilasta.

2.20. **Seuraus.** *Oletetaan, että löytyy sellainen harmoninen pystyvektori $h$, joka toteuttaa lisäehdon $h_i = 1$ jokaisella $i \in A$ sekä $h_j < 1$ jollakin $j \in S$. Tällöin myös $h_A < 1$ eli* absorptio ei ole varma, kun lähdetään tilasta $j$.

Voimme nyt selvittää absorptiotodennäköisyyden seuraavalle SK-ketjulle

2.21. **Esimerkki.** Tarkastellaan SK-ketjua luonnollisilla luvuilla $\mathbb{N}$, jonka siirtymätodennäköisyydet ovat

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 0, \\ p_i, & i \geq 1, j = i+1, \\ q_i = 1 - p_i, & i \geq 1, j = i-1, \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Tässä tapauksessa siis absorptiojoukkona $A$ on yksiö $\{0\}$. Selvitämme seuraavaksi, mikä on absorptiotodennäköisyys $h_{i0}$. Haemme siis harmonisia pystyvektoreita $h$, joille $h_0 = 1$. Muistamme, että $h$ on harmoninen, jos $Ph = h$ ja $0 \leq h \leq 1$. Ratkaisemme ensin yhtälön $Ph = h$. Koska $Ph = h$, niin kun $i \geq 1$ on siis voimassa

$$h_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij} h_j = q_i h_{i-1} + p_i h_{i+1} = (p_i + q_i) h_i. \tag{2.22}$$

Tämä yhtälö on siis toisen kertaluvun *lineaarinen differenssiyhtälö*. Ratkaisemme sen ratkaisemalla ensin ensimmäisen differenssin $h_{i+1} - h_i =: g_i$. Soveltamalla yhtälöä (2.22) kun $i \geq 1$ saamme $g_i$:lle kaavan

$$g_i = h_{i+1} - h_i = \frac{(p_i + q_i)h_i - q_i h_{i-i}}{p_i} - h_i = \frac{q_i h_i - q_i h_{i-i}}{p_i} = \frac{q_i}{p_i} g_{i-1} \tag{2.23}$$

Saimme siis ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differenssiyhtälön $g_i$:lle, ja tämä on helppo ratkaista rekursiivisesti, sillä

$$g_i = \frac{q_i}{p_i} g_{i-1} = \frac{q_i q_{i-1}}{p_i p_{i-1}} g_{i-2} = \cdots = \frac{q_i q_{i-1} \cdots q_1}{p_i p_{i-1} \cdots p_1} g_0 =: \delta_{i+1} g_0. \tag{2.24}$$

Tästä voimme nyt ratkaista vektorin $h$, sillä $h_i$ voidaan esittää summana sen peräkkäisistä erotuksista:

$$\begin{aligned} h_j &:= (h_j - h_{j-1}) + (h_{j-1} - h_{j-2}) + \cdots + (h_1 - h_0) + h_0 \\ &= h_0 + \sum_{i=0}^{j-1} g_i = h_0 + (h_1 - h_0) \sum_{i=0}^{j-1} \delta_{i+1} = 1 - (1 - h_1) \sum_{i=1}^{j} \delta_i \end{aligned} \tag{2.25}$$

Viimeisessä identiteetissä käytimme alkuehtoa $h_0 = 1$ ja myös tietoa, että $h_1 \leq 1$, jolloin $h_1 - 1 = -(1 - h_1)$.

Olemme nyt löytäneet kaikki ehdokkaat absorptiotodennäköisyydeksi $h_{i0}$. Kaavassa (2.25) on kuitenkin yksi tuntematon arvo ja se on $h_1$. Seuraavaksi selvitämme arvon $h_1$. Tarkastelussamme emme kuitenkaan ole vielä käyttäneet hyväksi ehtoa $0 \leq h \leq 1$ eli itse asiassa ääretöntä ehtojoukkoa $0 \leq h_j \leq 1$.

Merkitsemme seuraavassa

$$M_j := \sum_{i=1}^{j} \delta_i, \quad M := \lim_{j\to\infty} M_j.$$

Koska $M_j \geq 0$ aina, niin $h_j = 1-(1-h_1)M_j \leq 1$ jokaisella $j$. Siispä jäljelle jää ehdot $h_j \geq 0$ jokaisella $j$. Koska lisäksi $h_{j+1} - h_j = g_j = \delta_j(h_1 - 1) \leq 0$, niin jono $(h_j)$ on vähenevä. Tästä voimme päätellä, että riittää tarkastella ehtoja $h_j \geq 0$ suurilla $j$ tai itse asiassa, milloin $\lim h_j \geq 0$?

Oletetaan ensin, että $M = \lim M_j = \infty$ ja merkitsemme $\alpha = 1 - h_1$. Jos $\alpha = 0$, niin kaavan (2.25) nojalla $h_j = 1$ jokaisella $j$. Jos taas $\alpha > 0$, niin

$$h_j = 1 - \alpha M_j \to -\infty, \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Siispä riittävän suurilla $j$ arvot $h_j < 0$, eli $\alpha$ ei voi olla positiivinen. Olemme siten osoittaneet, että tilanteessa $M = \infty$ on $h \equiv 1$ ainoa ehdon $h_0 = 1$ toteuttava harmoninen vektori, joten Seuraus 2.19 nojalla absorptio tapahtuu varmasti kaikista lähtötilanteista.

Jäljellä on vielä tapaus, missä $M < \infty$. Tällöin raja-arvo

$$\lim_{j\to\infty} h_j = 1 - \alpha M$$

on olemassa ja se toteuttaa ehdon $\lim h_j \geq 0$ aina, kun

$$1 - \alpha M \geq 0 \Longrightarrow \alpha \leq 1/M \Longrightarrow h_1 \geq 1 - 1/M.$$

Nyt kaikki kaavalla (2.25) määritellyt ehdon $1 \geq h_1 \geq 1 - 1/M$ toteuttavat pystyvektorit ovat harmonisia. Pienin niistä saadaan valitsemalla pienin mahdollinen $h_1 = 1 - 1/M$. Lauseen 2.15 mukaan absorptiotodennäköisyys $h_{j0}$ on siis

$$h_{j0} = \begin{cases} 1, & \text{kun } M = \infty, \\ 1 - M_j/M, & \text{kun } M < \infty. \end{cases} \tag{2.26}$$

2.27. **Esimerkki.** Satunnaiskulun luonnollisilla luvuilla $\mathbb{N}$ absorptiotodennäköisyys saadaan edellisen esimerkin erikoistapauksena. Nyt $p_i = p$ ja $q_i = q$ kaikilla $i \geq 1$. Koska

$$\delta_{i+1} = \frac{q_i \cdots q_2 q_1}{p_i \cdots p_2 p_1} = (q/p)^i,$$

niin havaitsemme, että tässä tapauksessa $M_j$ ja $M$ ovat geometrinen summa ja sarja vastaavasti. Siispä

$$M_j = \sum_{i=1}^{j} (q/p)^{i-1} = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^j}{1-(q/p)} & \text{kun } q \neq p \\ j & \text{kun } q = p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ja

$$M = \begin{cases} \frac{1}{1-(q/p)}, & \text{kun } p > q \\ \infty, & \text{kun } p \leq q. \end{cases}$$

Koska $q = 1 - p$, niin $p > q$ tarkalleen silloin kun $p > \frac{1}{2}$. Siispä tilanteessa $p \leq \frac{1}{2}$ on absorptio varma jokaisesta lähtötilasta. Kun $p > \frac{1}{2}$, niin

$$h_{j0} = 1 - M_j/M = 1 - (1 - (q/p)^j) = (q/p)^j$$

eli absorptiotodennäköisyys vähenee geometrisesti lähtötilan $j$ etääntyessä absorptiotilasta 0. Huomaamme lisäksi, että *reilun kolikon* tilanteessa (eli kun $p = q = \frac{1}{2}$) absorptio tapahtuu varmasti.